ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ

$15^{ος}$ Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά

«Η ΥΠΑΤΙΑ»

Σάββατο 4 Νοεμβρίου 2023

Α΄ Γυμνασίου

ΘΕΜΑ $1^{ο}$

Στην Αλεξάνδρεια, τρεις γυναίκες, η Δελφίς, η Ίρις και η Νεφέλη, ανακρίνονται ως ύποπτες για κλοπή ενός παπύρου του Ερατοσθένη. Είναι γνωστό ότι κάθε γυναίκα είτε λέει πάντα την αλήθεια είτε λέει πάντα ψέματα.

Στις απολογίες τους είπαν:

(α) Δελφίς: Είμαι αθώα.

(β) Ίρις: Η Νεφέλη έκλεψε τον πάπυρο.

(γ) Νεφέλη: Είμαι αθώα.

(δ) Ίρις: Είμαι ένοχη.

(ε) Δελφίς: Ναι, η Ίρις είναι όντως ένοχη.

Αν ακριβώς μία από τις Δελφίς, Ίρις και Νεφέλη έκανε την κλοπή, ποια είναι η ένοχη;

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

Η απάντηση είναι η Δελφίς.

Η Ίρις έκανε δύο αντικρουόμενες δηλώσεις, άρα πάντα λέει ψέματα , οπότε δεν είναι ένοχη.

Συνέπεια αυτού είναι ότι και η Νεφέλη είναι αθώα οπότε προκύπτει ότι η Δελφίς λέει ψέματα άρα είναι ένοχη.

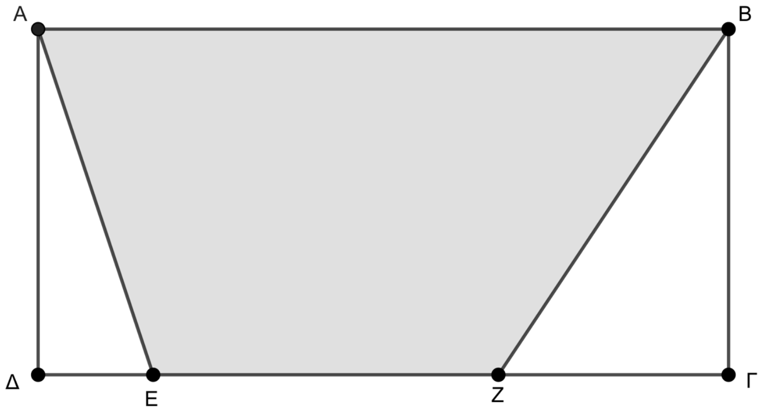
ΘΕΜΑ 2ο

Στο διπλανό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο **ΑΒΓΔ**, το εμβαδόν του τραπεζίου **ΑΒΖΕ** είναι **266cm²** και οι πλευρές **ΑΒ=30cm**

ΑΔ=14cm και

ΔΕ=5cm.

Να βρείτε την πλευρά **ΖΓ.**



(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

$E_{ΑΒΓΔ} = ΑΒ \cdot ΑΔ = 14 \cdot 30 = 420\ cm^2$

$E_{ΑΔΕ} = \frac{ΔΕ \cdot ΑΔ}{2} = \frac{14 \cdot 5}{2} = 35\ cm^2$

$E_{ΒΖΓ} = E_{ΑΒΓΔ} - (E_{ΑΔΕ} + E_{ΑΒΖΕ}) = 420 - (266 + 35) = 420 - 301 = 119\ cm^2$

Οπότε $E_{ΒΖΓ} = 119\ cm^2$

$\frac{ΖΓ \cdot ΒΓ}{2} = 119$

$\frac{ΖΓ \cdot 14}{2} = 119$

$ΖΓ \cdot 14 = 2 \cdot 119$

$ΖΓ \cdot 14 = 238$

$ΖΓ = 238 : 14$

$ΖΓ = 17\ cm$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathbf{A}= (1-\frac{1}{2})\cdot(1-\frac{1}{3})\cdot(1-\frac{1}{4})\cdot..........\cdot(1-\frac{1}{2022})\cdot(1-\frac{1}{2023}).$$

(Μονάδες 2)

β. Να βρεθεί ο αριθμός Β, όταν:

$$\frac{1}{4\cdot5}\cdot\frac{1}{99+2}=\frac{1}{\mathrm{B}-4}.$$

(Μονάδες 2)

γ. Να συγκρίνετε τις τιμές A και $\frac{1}{\mathrm{B}}$.

(Μονάδες 1)

ΛΥΣΗ

α. Α = $(1-\frac{1}{2})\cdot(1-\frac{1}{3})\cdot(1-\frac{1}{4})\cdot..........\cdot(1-\frac{1}{2022})\cdot(1-\frac{1}{2023})$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot..........\cdot\frac{2021}{2022}\cdot\frac{2022}{2023}$

$= \frac{1\cdot2\cdot3\cdot...........\cdot2021\cdot2022}{2\cdot3\cdot4\cdot..........\cdot2022\cdot2023}$

$= \frac{1}{2023}$

β . $\frac{1}{4\cdot5}\cdot\frac{1}{99+2}=\frac{1}{\mathrm{B}-4}=$

$\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{101}=\frac{1}{\mathrm{B}-4}=$

$\frac{1}{2020}=\frac{1}{\mathrm{B}-4}$

$\mathrm{B}-4=2020=$

$\mathrm{B}=2024$

γ. Α= $\frac{1}{2023}$ και $\frac{1}{\mathrm{B}}=\frac{1}{2024}$. Άρα $\frac{1}{2023}>\frac{1}{2024}$

ΘΕΜΑ 4º

Αν τα Κ, Λ και Μ είναι ψηφία (εκτός από το μηδέν) τέτοια ώστε:

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbf{K} & \mathbf{\Lambda} & \mathbf{M} & \mathbf{\Lambda} \\ + & & \mathbf{M} & \mathbf{5} & \mathbf{K} \\ \hline & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{array}$$

Να υπολογίσετε το άθροισμα **Κ+Λ+Μ**.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

Από την τελευταία στήλη προκύπτει ότι: Λ+Κ=3 ή Λ+Κ=13

Επίσης, Μ+5=2 ή Μ+5=12

Αλλά επειδή ο αριθμός Μ είναι ψηφίο εκτός από το μηδέν, δηλαδή από 1 εως 9 , το άθροισμα Μ+5 αποκλείεται να ισούται με 2. Οπότε Μ+2=12, δηλαδή **Μ=7**.

Επίσης, Λ+Μ+1=10 (αφού υπάρχει κρατούμενο) , οπότε Λ+7+1=10, δηλαδή **Λ=2**.

Οπότε, Λ+Κ=13 αδύνατο, αφού γιατί θα έπρεπε Κ=11 .

Αρα, Λ+Κ=3 δηλαδη **Κ=1**

Τελικά **Κ+Λ+Μ=10**.