Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)
Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{Bmatrix} 5x-2y+\dfrac{3}{2x-6y}=\dfrac{13}{2} \\ (5x-2y)(x-3y)+2=6(x-3y) \end{Bmatrix}$$

Λύση
Για $x \neq 3y$ διαιρούμε τα μέλη της εξίσωσης (2) με $(x-3y)$ οπότε το σύστημα γράφεται ισοδύναμα:

$$\left.\begin{matrix} 5x-2y+\dfrac{3}{2x-6y}=\dfrac{13}{2} \\ (5x-2y)+\dfrac{2}{x-3y}=6 \end{matrix}\right\}.$$

Αντικαθιστώντας τώρα, όπου $5x-2y=\alpha$ και $\dfrac{1}{x-3y}=\beta$,

το τελευταίο σύστημα γίνεται:

$$\left.\begin{matrix} \alpha+\dfrac{3\beta}{2}=\dfrac{13}{2} \\ \alpha+2\beta=6 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 2\alpha+3\beta=13 \\ \alpha+2\beta=6 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{matrix} \alpha=8 \\ \beta=-1 \end{matrix}.$$

Άρα έχουμε:

$$\left.\begin{matrix} 5x-2y=8 \\ \dfrac{1}{x-3y}=-1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 5x-2y=8 \\ x-3y=-1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{matrix} x=2 \\ y=1 \end{matrix}.$$

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)
Να προσδιορίσετε τους τριψήφιους ακέραιους $N=\overline{\alpha 1\beta}=100\alpha+10+\beta, 0<\alpha<\beta$,
που είναι ίσοι με το οκταπλάσιο του αθροίσματος $\alpha+(\alpha+1)+\cdots+\beta+(\beta+1)$, στο οποίο αθροίζουμε όλους τους ακεραίους από τον α μέχρι και τον $\beta+1$.

Λύση
Σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε

$$N=\overline{\alpha 1\beta}=100\alpha+10+\beta=8[\alpha+(\alpha+1)+\cdots+\beta+(\beta+1)]\leq 8(1+2+\ldots+10)=440,$$

από την οποία προκύπτει ότι: $\alpha \leq 4$. Επομένως έχουμε τις περιπτώσεις:

- $\alpha=4$. Τότε $415 \leq N \leq 419$, Nπολλαπλάσιο του 8 $\Rightarrow \mathrm{N}=416$. Παρατηρούμε όμως ότι
  $\alpha+(\alpha+1)+\cdots+\beta+(\beta+1)=4+5+6+7=22$ και $22\cdot 8=176 \neq 416$.
- $\alpha=3$. Τότε $314 \leq N \leq 319$, N πολλαπλάσιο του 8, άτοπο.
- $\alpha=2$. Τότε $213 \leq N \leq 219$, N πολλαπλάσιο του 8 $\Rightarrow \mathrm{N}=216$.
  Παρατηρούμε ότι:

$\alpha+(\alpha+1)+\cdots+\beta+(\beta+1)=2+3+4+5+6+7=27$και $27\cdot 8=216$.

- $\alpha=1$. Τότε $112\leq N\leq 119, N$ πολλαπλάσιο του $8\Rightarrow \mathrm{N}=112$.
  Παρατηρούμε όμως ότι:
  $\alpha+(\alpha+1)+\cdots+\beta+(\beta+1)=1+2+3=6$ και $6\cdot 8=48\neq 112$.

Επομένως η μοναδική λύση του προβλήματος είναι ο αριθμός $\mathrm{N}=216$.

2ος τρόπος: Επειδή ο αριθμός διαιρείται με το 8, θα διαιρείται και με το 4, οπότε το τελευταίο διψήφιο τμήμα του θα διαιρείται με το 4. Επομένως ο αριθμός $\overline{1\beta}$ θα διαιρείται με το 4. Συνεπώς $\beta=2$ ή $\beta=6$.

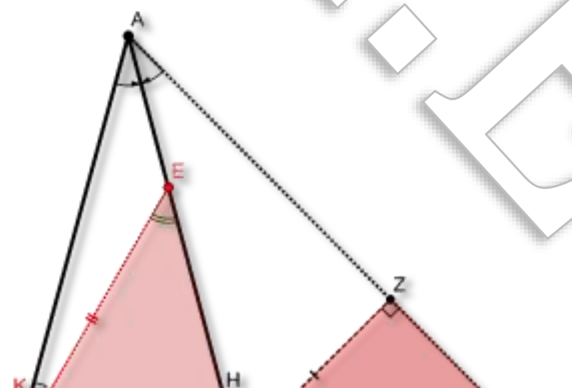
- Αν $\beta=2$, τότε από τη σχέση $\alpha<\beta$, παίρνουμε ότι $\alpha=1$, οπότε $\mathrm{N}=112$.
  Παρατηρούμε όμως ότι:
  $\alpha+(\alpha+1)+\cdots+\beta+(\beta+1)=1+2+3=6$ και $6\cdot 8=48\neq 112$.
- Αν $\beta=6$, τότε από τη σχέση $\alpha<\beta$ παίρνουμε $\alpha\in\{1,2,3,4,5\}$. Όμως $N=100\alpha+16$, άρα για να διαιρείται με το 8, πρέπει α άρτιος. Επομένως, $\alpha=2$ ή $\alpha=4$. Για $\alpha=2$, παίρνουμε $N=216$, που ικανοποιεί, ενώ για $\alpha=4$, παίρνουμε $N=416$, που δεν ικανοποιεί.

Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$. Στην προέκταση της πλευράς ΒΓ προς το μέρος του Γ παίρνουμε σημείο Δ έτσι ώστε $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma=\Gamma\widehat{\mathrm{A}}\Delta$. Πάνω στην ευθεία ΑΓ παίρνουμε σημείο Ε τέτοιο ώστε $\mathrm{BE}=\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{E}}\Gamma=\Gamma\widehat{\Delta}\mathrm{A}$.

Λύση

Από το σημείο Β θεωρούμε ΒΗ κάθετη στην ΑΓ, από το σημείο Γ θεωρούμε ΓΚ κάθετη στην ΑΒ και από το σημείο Γ θεωρούμε ΓΖ κάθετη στην ΑΔ.



Εφόσον $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma=\Gamma\widehat{\mathrm{A}}\Delta$ η ΑΓ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Delta$ και κατά συνέπεια:

$$\Gamma\mathrm{Z}=\Gamma\mathrm{K}\qquad(1).$$

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, άρα τα τμήματα ΓΚ και ΒΗ είναι ίσα μεταξύ τους (διότι είναι τα ύψη του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του). Άρα:

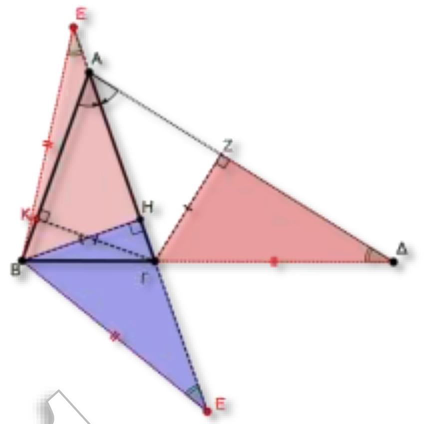
$$\mathrm{BH}=\Gamma\mathrm{K}\qquad(2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε: $\mathrm{BH}=\Gamma\mathrm{Z}\qquad(3)$.

Για τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΕΗ και ΖΔΓ, ισχύουν οι ισότητες πλευρών: ΒΕ = ΓΔ (δεδομένο) και ΒΗ = ΓΖ (από την ισότητα (3)). Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε:

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{H} = \Gamma\hat{\Delta}\mathrm{Z} \Leftrightarrow \mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Gamma = \Gamma\hat{\Delta}\mathrm{A}.$$

Παρατήρηση

Το σημείο E θα μπορούσε να βρίσκεται εκτός του τμήματος $ΑΓ$ (όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα) … και στις δύο περιπτώσεις ακολουθούμε ανάλογη διαδικασία (συγκρίνοντας τα κατάλληλα σκιασμένα ορθογώνια τρίγωνα)	

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)

Να βρεθούν οι τριάδες (x, y, z) θετικών πραγματικών αριθμών που είναι λύσεις του συστήματος:

$$2x^3 - 7y^2 + 4z = -4$$
$$2y^3 - 7z^2 + 4x = -4$$
$$2z^3 - 7x^2 + 4y = -4$$

Λύση

Προσθέτοντας τις τρείς σχέσεις κατά μέλη έχουμε:

$$(2x^3 - 7y^2 + 4z + 4) + (2y^3 - 7z^2 + 4x + 4) + (2z^3 - 7x^2 + 4y + 4) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2x^3 - 7x^2 + 4x + 4) + (2y^3 - 7y^2 + 4y + 4) + (2z^3 - 7z^2 + 4z + 4) = 0.$$

Παραγοντοποιούμε την παράσταση της πρώτης παρένθεσης:

$$2x^3 - 7x^2 + 4x + 4 = 2x^3 - 4x^2 - 3x^2 + 4x + 4 =$$
$$= 2x^2(x-2) - 2x^2 + 4x - x^2 + 4 =$$
$$= 2x^2(x-2) - 2x(x-2) - (x-2)(x+2) =$$
$$= (x-2)(2x^2 - 3x - 2) = (x-2)^2(2x+1).$$

Με όμοιο τρόπο παραγοντοποιούμε και τις άλλες παρενθέσεις, οπότε η τελευταία εξίσωση γίνεται:

$$(x-2)^2(2x+1) + (y-2)^2(2y+1) + (z-2)^2(2z+1) = 0.$$

Επειδή όμως $x, y, z > 0$, θα πρέπει $x = y = z = 2$, οπότε $(x, y, z) = (2, 2, 2)$.

Παρατήρηση

Η παραγοντοποίηση των παρενθέσεων μπορεί να γίνει και με τη βοήθεια του σχήματος Horner (αναζητώντας λύσεις μεταξύ των διαιρετών του 4).

$2^{ος}$ τρόπος: Μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι ο x είναι ο μικρότερος από τους τρεις αριθμούς. Επομένως, $x \leq y$ και $x \leq z$. Επομένως, η τρίτη εξίσωση δίνει

$$2x^3 - 7x^2 + 4x \leq 2z^3 - 7x^2 + 4y = -4 \quad (1)$$

Όπως και στον $1^ο$ τρόπο, έχουμε ότι $2x^3 - 7x^2 + 4x + 4 = (x-2)^2(2x+1)$, επομένως η (1) δίνει ότι $(x-2)^2(2x+1) \leq 0$ (2).
Πρέπει λοιπόν να ισχύει η ισότητα στη (2), άρα και στην (1), επομένως, $x = y = z = 2$.

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)
Να προσδιορίσετε όλους τους τετραψήφιους ακέραιους

$$N = \overline{\alpha\beta\gamma\delta} = 1000\alpha + 100\beta + 10\gamma + \delta, 0 < \alpha < \gamma,$$

που είναι ίσοι με το οκταπλάσιο του αθροίσματος

$$(\alpha-1)^2 + \alpha^2 + \cdots + \gamma^2 + (\gamma+1)^2,$$

στο οποίο αθροίζουμε όλα τα τετράγωνα των μη αρνητικών ακεραίων από τον $\alpha - 1$ μέχρι και τον $\gamma + 1$.

Λύση
Σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε

$$N = \overline{\alpha\beta\gamma\delta} = 1000\alpha + 100\beta + 10\gamma + \delta = 8[(\alpha-1)^2 + \alpha^2 + \cdots + \gamma^2 + (\gamma+1)^2]$$
$$\leq 8(0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + 10^2) = 3080,$$

από την οποία προκύπτει ότι: $\alpha \leq 3$. Επομένως έχουμε τις περιπτώσεις:
Αν $\alpha = 3$, και $\gamma \leq 8$ έχουμε

$$8[2^2 + \cdots + \gamma^2 + (\gamma+1)^2] \leq 8[2^2 + \cdots + 8^2 + 9^2] < 3000, \text{ αδύνατο.}$$

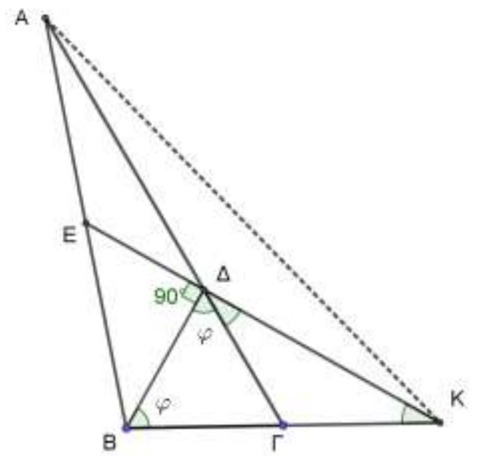
Άρα πρέπει $\gamma = 9$.
Για $\gamma = 9$, δεν έχουμε επίσης λύση γιατί

$$8(2^2 + \cdots + 8^2 + 9^2 + 10^2) = 3072, \text{ άτοπο.}$$

Αν $\alpha = 2$, τότε αν $\gamma \leq 7$ έχουμε: $8[1^2 + \cdots + \gamma^2 + (\gamma+1)^2] \leq 8[1^2 + \cdots + 8^2] < 2000$, αδύνατο. Άρα $\gamma = 8$ ή $\gamma = 9$.
Για $\gamma = 8$ έχουμε $8[1^2 + \cdots + 8^2 + 9^2] = 2280$, δεκτή.
Για $\gamma = 9$ έχουμε $8[1^2 + \cdots + 8^2 + 9^2 + 10^2] > 3000$, αδύνατο.
Αν $\alpha = 1$, τότε έχουμε ότι για $\gamma \geq 8$ ο αριθμός είναι μεγαλύτερος από $8[1^2 + \cdots + 8^2 + 9^2] = 2280$, αδύνατο.
Επίσης για $\gamma \leq 5$ έχουμε ότι ο αριθμός είναι μικρότερος από $8[1^2 + \cdots + 6^2] = 728$, άτοπο. Επομένως $\gamma = 6$ ή $\gamma = 7$. Όμως και οι δύο περιπτώσεις δεν οδηγούν σε λύση, αφού για $\gamma = 6$ ο αριθμός θα έπρεπε να είναι ίσος με $8[1^2 + \cdots + 7^2] = 1120$, αδύνατο. Τέλος για $\gamma = 7$ έχουμε ότι ο αριθμός θα έπρεπε να είναι ίσος με

$8[1^2 + \cdots + 8^2] = 1632$, επίσης αδύνατο.
Επομένως, μοναδική λύση είναι ο αριθμός 2280.

Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΓ > ΒΓ$. Παίρνουμε σημείο Δ πάνω στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε $ΓΔ = ΓΒ$. Αν η κάθετη στο σημείο Δ προς την ευθεία ΔΒ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο μέσο της, να αποδείξετε ότι $ΑΓ = 3 \cdot ΒΓ$.
Λύση
Έστω Ε το μέσον της ΑΒ. Έστω ότι η κάθετη ευθεία προς την ευθεία ΔΒ στο σημείο Δ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Κ. Επειδή είναι $ΓΒ = ΓΔ$, έπεται ότι $Δ\widehat{Β}Γ = Β\widehat{Δ}Γ = \varphi$, οπότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΚ έχουμε ότι $Γ\widehat{Δ}Κ = Γ\widehat{Κ}Δ = 90^0 - \varphi$. Επομένως. το τρίγωνο ΓΔΚ είναι ισοσκελές με συνέπεια $ΓΚ = ΓΔ = ΓΒ$, δηλαδή το Γ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΒΚ και η ευθεία ΑΓ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΚ



Επειδή η ευθεία ΚΔ περνάει από το μέσο της πλευράς ΑΒ, έπεται ότι το σημείο Δ είναι το σημείο τομής των διαμέσων του τριγώνου ΑΒΚ. Επομένως έχουμε $ΑΔ = 2 \cdot ΔΓ$ και

$$ΑΓ = ΑΔ + ΔΓ = 2 \cdot ΔΓ + ΔΓ = 3 \cdot ΔΓ = 3 \cdot ΒΓ.$$

2ος τρόπος: Ονομάζουμε Μ το μέσον της ΑΒ. Θεωρούμε τα μέσα Ν, Ρ των τμημάτων ΑΔ και ΔΒ. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι ΝΔ=ΔΓ.
Στο τρίγωνο ΑΒΔ, η ΜΝ ενώνει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου, άρα

$$ΜΝ//= \frac{ΔΒ}{2} = ΔΡ \ (1)$$

Από την παραλληλία προκύπτει ότι $ΔΜ \perp ΜΝ$ και $\angle ΜΝΔ = \angle ΒΔΓ$ (2).
Από τις (1), (2) έπεται ότι τα τρίγωνα ΜΝΔ και ΓΔΡ είναι ίσα, άρα ΓΔ=ΔΝ, που είναι το ζητούμενο.

Γ′ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)
Να λύσετε στους θετικούς ακέραιους το σύστημα:

$$4\alpha^2 = 6\beta^2 + 5\gamma^2 + 25$$
$$13\alpha = 3\beta + 2\gamma + 34.$$

Λύση
Από την πρώτη εξίσωση προκύπτει ότι ο γ πρέπει να είναι περιττός ακέραιος, αφού διαφορετικά θα προέκυπτε ότι ο ακέραιος $4\alpha^2 - 6\beta^2 - 5\gamma^2 = 25$ είναι άρτιος.
Επίσης από την πρώτη εξίσωση προκύπτει ότι $\alpha > \beta$ και $\alpha > \gamma$.
Πράγματι, αν ήταν $\alpha \leq \beta$ ή $\alpha \leq \gamma$, τότε θα είχαμε $4\alpha^2 < 6\beta^2 + 5\gamma^2 + 25$.
Από τη δεύτερη εξίσωση λαμβάνουμε:

$$13\alpha = 3\beta + 2\gamma + 34 < 5\alpha + 34 \Rightarrow 8\alpha < 34 \Rightarrow \alpha \in \{1,2,3,4\}.$$

Η περίπτωση $\alpha = 1$ αποκλείεται, αφού $\alpha > \beta$ και $\alpha > \gamma$. Ομοίως για $\alpha = 2$ προκύπτει το σύστημα: $6\beta^2 + 5\gamma^2 = -9, 3\beta + 2\gamma = -8$, (αδύνατο). Για $\alpha = 3$ προκύπτει το σύστημα: $6\beta^2 + 5\gamma^2 = 11, 3\beta + 2\gamma = 5$ με μοναδική λύση στους θετικούς ακέραιους $\beta = \gamma = 1$. Για $\alpha = 4$ προκύπτει το σύστημα $6\beta^2 + 5\gamma^2 = 39, 3\beta + 2\gamma = 18$, το οποίο δεν έχει ακέραιες λύσεις.
Επομένως, η μοναδική λύση του συστήματος είναι η $(\alpha, \beta, \gamma) = (3, 1, 1)$.

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)
Θεωρούμε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f(2f(x) + y) = f(f(y) + x) + x. \ (*)$$

(α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ υπάρχει $z \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(z) = \alpha$ και ότι η f είναι 1-1.
(β) Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις f που ικανοποιούν την (*).

Λύση
(α) Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν θέσουμε όπου y το $-2f(x)$ παίρνουμε

$$f(0) - x = f(f(-2f(x)) + x) \qquad (1)$$

Επομένως, αν θέσουμε όπου x το $-\alpha + f(0)$ στην (1), βρίσκουμε z ώστε $f(z) = \alpha$.
Για το 1-1, παίρνουμε y_0 ώστε $f(y_0) = 0$. Για y το y_0 η (1) δίνει

$$f(2f(x) + y_0) = f(x) + x \qquad (2).$$

Επομένως, αν x_1, x_2 με $f(x_1) = f(x_2)$, έχουμε $f(2f(x_1) + y_0) = f(2f(x_2) + y_0)$, άρα από την (3) $f(x_1) + x_1 = f(x_2) + x_2$, άρα $x_1 = x_2$.

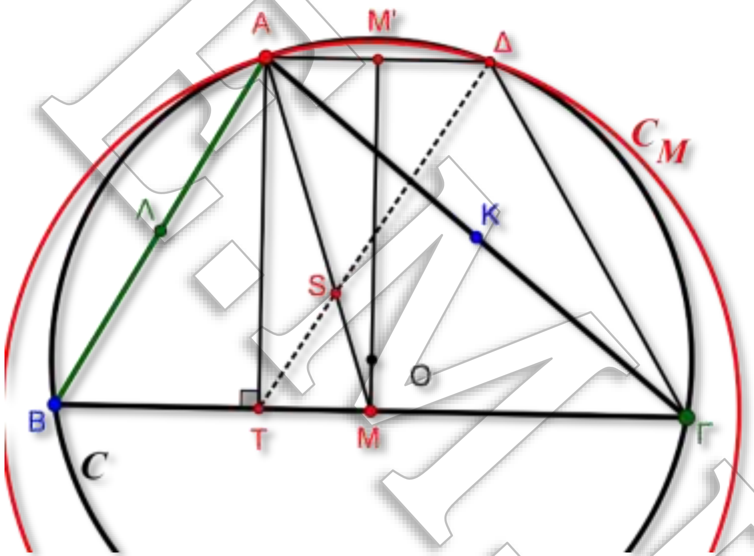
(β) Αν θέσουμε όπου x το 0 στην (*), παίρνουμε $f(2f(0) + y) = f(f(y))$ και αφού η f είναι 1-1 θα ισχύει $f(y) = 2f(0) + y$, δηλαδή $f(y) = y + c$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.
Αντικαθιστώντας στη σχέση (*) παίρνουμε $f(2(x + c) + y) = f(x + y + c) + x \Rightarrow$ $2x + y + 3c = 2x + y + 2c$, οπότε $c = 0$.
Τελικά η ζητούμενη συνάρτηση είναι η $f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB < A\Gamma < B\Gamma$), εγγεγραμμένο σε κύκλο C με κέντρο O και ακτίνα R. Θεωρούμε τα μέσα M, K, Λ των πλευρών $B\Gamma, A\Gamma, AB$ (αντίστοιχα) καθώς και τους κύκλους $C_M(M, MA)$, $C_K K, KB)$, $C_\Lambda(\Lambda, \Lambda\Gamma)$ με κέντρα τα σημεία M, K, Λ και ακτίνες $MA, KB, \Lambda\Gamma$, αντίστοιχα, οι οποίοι τέμνουν τον κύκλο C στα σημεία Δ, E, Z αντίστοιχα. Αν T, P, Σ είναι οι προβολές των κορυφών A, B, Γ , αντίστοιχα, του τριγώνου $AB\Gamma$ προς τις απέναντι πλευρές του, να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΔT, EP και $Z\Sigma$ συντρέχουν.

Λύση

Έστω ότι ο κύκλος με κέντρο το μέσο M της $B\Gamma$ και ακτίνα MA (C_M), τέμνει το κύκλο C στο σημείο Δ. Έστω ακόμη T η προβολή της κορυφής A στη πλευρά. Θα αποδείξουμε ότι η ευθεία ΔT περνάει από σταθερό σημείο.



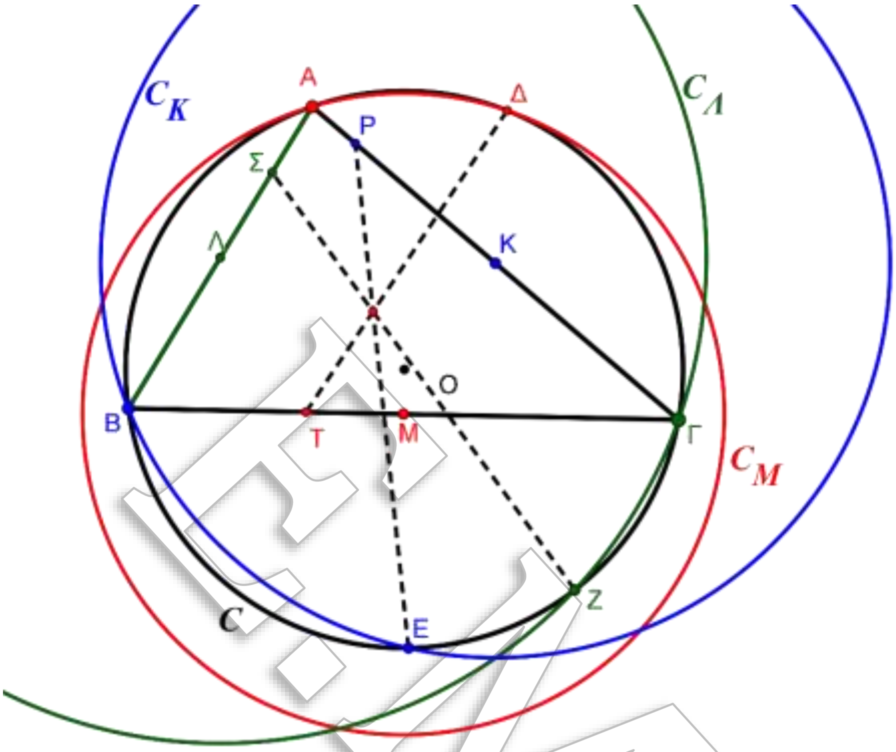
Η OM είναι διάκεντρος των κύκλων C και C_M. Άρα η OM είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής $A\Delta$ των δύο κύκλων. Η OM είναι (επίσης) μεσοκάθετος της χορδής $B\Gamma$ του κύκλου C. Οπότε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο, εγγεγραμμένο στον κύκλο C. Έστω ότι η προέκταση της OM τέμνει την $A\Delta$ στο σημείο M'. Τότε το M' θα είναι το μέσο της $A\Delta$, οπότε θα ισχύει:

$$MT = AM' = \frac{A\Delta}{2} \qquad (1).$$

Αν τώρα οι AM και ΔT τέμνονται στο σημείο S. Τότε τα τρίγωνα $A\Delta S$ και MTS είναι όμοια και κατά συνέπεια:

$$\frac{SA}{SM} = \frac{A\Delta}{MT} \overset{(1)}{=} 2.$$

Άρα το σημείο S είναι βαρύκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$.
Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι οι EP και $Z\Sigma$ διέρχονται από το βαρύκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$.



C_K
A
Δ
$C_Λ$
P
Σ
Λ
K
O
B
T
M
Γ
C_M
Z
E
C