ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
82ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
5 Νοεμβρίου 2021

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρεθούν οι τριψήφιοι θετικοί ακέραιοι $x=\overline{abc}$ και $y=\overline{cba}$ για τους οποίους ισχύει $0<c<a$ και οι δύο διαιρούνται με το 4 .

(*Σημείωση:* $x=\overline{abc}=100a+10b+c$, $y=\overline{cba}$ $=100c+10b+a$).

Λύση
Εφόσον οι αριθμοί x,y είναι τριψήφιοι θετικοί ακέραιοι, τα a και c θα είναι ψηφία διαφορετικά από το μηδέν, όπως δίνεται και στην υπόθεση. Για το ψηφίο b δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός, οπότε ο b μπορεί να είναι οποιοσδήποτε μη αρνητικός μονοψήφιος ακέραιος.
Εφόσον οι αριθμοί x,y διαιρούνται με το 4 θα είναι άρτιοι, οπότε οι μονοψήφιοι ακέραιοι a και c θα είναι άρτιοι και επειδή $c<a$, οι δυνατές τιμές για το ζεύγος (a,c) μπορεί να είναι:

$$(8,6) \text{ ή } (8,4) \text{ ή } (8,2) \text{ ή } (6,4) \text{ ή } (6,2) \text{ ή } (4,2).$$

Πρέπει επίσης οι αριθμοί $\overline{bc}$ και $\overline{ba}$ να διαιρούνται με το 4. Δοκιμάζοντας τώρα τις τιμές του $b=0$ ή $b=1$ ή $b=2$ ή $b=3$ ή $b=4$ ή $b=5$ ή $b=6$ ή $b=7$ ή $b=8$ ή $b=9$
(σε συνδυασμό με τα προηγούμενα) καταλήγουμε ότι οι ζητούμενοι αριθμοί $x=\overline{abc}$ είναι οι: $884, 864, 844, 824, 804$ και $692, 672, 652, 632, 612$.
Οι αριθμοί $y=\overline{cba}$ προκύπτουν από την εναλλαγή των ψηφίων του αριθμού $x=\overline{abc}$.

Πρόβλημα 2

Οι καθηγητές των Μαθηματικών και Φυσικής βαθμολόγησαν για το Α τετράμηνο τους μαθητές ενός Τμήματος του Γυμνασίου τους ως εξής:
Ο καθηγητής των Μαθηματικών έβαλε α φορές το βαθμό 20, β φορές το βαθμό 18, γ φορές το βαθμό 16 και δ φορές το βαθμό 14. Ο καθηγητής της Φυσικής έβαλε α φορές το βαθμό 18, β φορές το βαθμό 16, γ φορές το βαθμό 14 και δ φορές το βαθμό 20. Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των βαθμών των μαθητών του Τμήματος στα Μαθηματικά ισούται με το άθροισμα των βαθμών των μαθητών του Τμήματος στη Φυσική. Να προσδιορίσετε τον αριθμό N των μαθητών του Τμήματος, αν δίνεται ότι $20<N<28$.

Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση το πλήθος των μαθητών του Τμήματος είναι $N = \alpha + \beta + \gamma + \delta$ και επειδή το άθροισμα των βαθμών των μαθητών του Τμήματος στα Μαθηματικά ισούται με το άθροισμα των βαθμών των μαθητών του Τμήματος στη Φυσική, έχουμε:

$$20\alpha + 18\beta + 16\gamma + 14\delta = 18\alpha + 16\beta + 14\gamma + 20\delta$$
$$\Rightarrow 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 6\delta \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 3\delta.$$

Επομένως, έχουμε $N = \alpha + \beta + \gamma + \delta = 3\delta + \delta = 4\delta$ και αφού $20 < N < 28$, έπεται ότι $N = 24$.

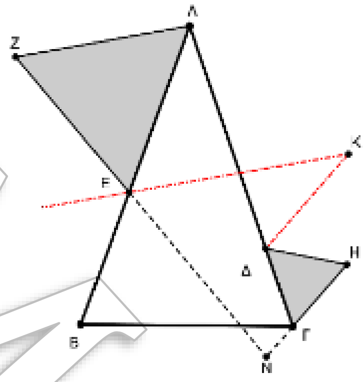
Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ = ΑΓ) και τα τρίγωνα ΑΕΖ, ΔΓΗ είναι ισόπλευρα. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\mathrm{B\hat{E}Z}$ και $\mathrm{A\hat{\Delta}H}$ τέμνονται στο σημείο Κ. Οι προεκτάσεις των ευθύγραμμων τμημάτων ΕΖ και ΓΗ τέμνονται στο σημείο Ν.

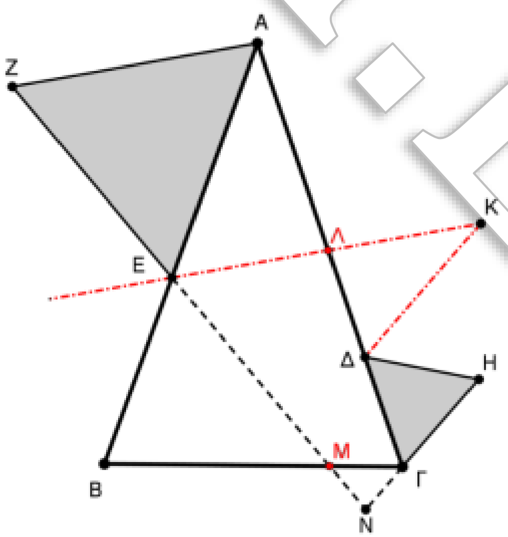
Να αποδείξετε ότι:

(α) $E\widehat{K}\Delta = B\widehat{A}\Gamma$

(β) $E\widehat{N}\Gamma = 120^0 - B\widehat{A}\Gamma$



Λύση



Έστω τώρα Μ η τομή της ΕΝ με την ΒΓ και Λ η τομή της ΕΚ με την ΑΓ . Τότε ισχύουν οι παρακάτω ισότητες γωνιών:

(α) $\mathrm{E\widehat{K}\Delta = \Lambda\widehat{K}\Delta} = 180° - \mathrm{K\widehat{\Lambda}\Delta} - \mathrm{K\widehat{\Delta}\Lambda} = 180° - \mathrm{K\widehat{\Lambda}\Delta} - 60° = 120° - \mathrm{K\widehat{\Lambda}\Delta} =$
$= 120° - \mathrm{A\widehat{\Lambda}E} = 120° - \left(180° - \widehat{\mathrm{A}} - \mathrm{A\widehat{E}\Lambda}\right) = 120° - \left(180° - \widehat{\mathrm{A}} - 60°\right) = \widehat{\mathrm{A}}.$

(β) $\mathrm{E\widehat{N}\Gamma = M\widehat{N}\Gamma} = 180° - \mathrm{N\widehat{M}\Gamma} - \mathrm{N\widehat{\Gamma}M} = 180° - \mathrm{E\widehat{M}B} - \mathrm{N\widehat{\Gamma}M} =$

$$= 180° - \left(180° - \widehat{\mathrm{B}} - \mathrm{B\widehat{E}M}\right) - \left(180° - \widehat{\Gamma} - \Delta\widehat{\Gamma}\mathrm{H}\right) =$$
$$= 180° - \left(180° - \widehat{\mathrm{B}} - 60°\right) - \left(180° - \widehat{\Gamma} - 60°\right) =$$
$$= \widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\Gamma} - 60° = 180° - \widehat{\mathrm{A}} - 60° = 120° - \widehat{\mathrm{A}}.$$

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)

Ο Γιάννης μπορεί να χρησιμοποιήσει απεριόριστες φορές το ψηφίο 9 και ακριβώς μία μόνο φορά το ψηφίο 2 για να γράψει θετικούς ακέραιους. Να βρείτε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο που μπορεί να γράψει ο Γιάννης ο οποίος διαιρείται με το μεγαλύτερο δυνατό πλήθος στοιχείων του συνόλου $\Sigma = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Λύση

Ο αριθμός που μπορεί να γράψει ο Γιάννης θα τελειώνει σε 9 ή σε 2, οπότε δεν μπορεί να διαιρείται με το 5.

Επίσης, το άθροισμα των ψηφίων οποιουδήποτε αριθμού μπορεί να γράψει ο Γιάννης είναι της μορφής $9\kappa + 2 = \pi o\lambda. 3 + 1$, οπότε ο αριθμός δεν μπορεί να διαιρείται με το 3. Επίσης δεν μπορεί να διαιρείται με το 6 ή το 9 που είναι πολλαπλάσια του 3.

Θα εξετάσουμε τώρα τη δυνατότητα να διαιρείται ο αριθμός με κάποιους από τους αριθμούς 2, 4, 7 και 8.

Ο αριθμός που θα γράψει ο Γιάννης θα διαιρείται με το 2, αν το τελευταίο ψηφίο του είναι το 2. Στη περίπτωση που το τελευταίο ψηφίο του είναι το 2, τότε το τελευταίο διψήφιο τμήμα του θα είναι σε κάθε περίπτωση το 92 που διαιρείται με το 4, οπότε και ο αριθμός θα διαιρείται με το 4.

Έτσι, απομένει η περίπτωση να διαιρείται ο αριθμός με το 8 και το 7.

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός 992 διαιρείται με το 8, αλλά δεν διαιρείται με το 7.

Επιπλέον παρατηρούμε ότι η επισύναψη του ψηφίου 9 στα αριστερά του αριθμού 992 τον αυξάνει κατά $9000 = 9 \cdot 1000 = 9 \cdot 125 \cdot 8$, που είναι πολλαπλάσιο του 8. Ομοίως η επισύναψη του ψηφίου 9 αριστερά του 992 περισσότερες φορές αυξάνει τον αριθμό κατά αριθμό πολλαπλάσιο του 1000, άρα και του 8, οπότε ο αριθμός που προκύπτει σε κάθε περίπτωση διαιρείται με το 8.

Επομένως αρκεί να βρούμε τον ελάχιστο αριθμό φορών που πρέπει να επισυνάψουμε αριστερά το 9 ώστε ο αριθμός που θα προκύψει να διαιρείται με το 7. Παρατηρούμε ότι:

$$992 = 7 \cdot 141 = 5, 9000 = 7 \cdot 1285 + 5 \Rightarrow 9992 = \pi o\lambda. 7 + 10 = \pi o\lambda. 7 + 3,$$
$$90000 = 10 \cdot 9000 = \pi o\lambda. 7 + 50 = \pi o\lambda. 7 + 1 \Rightarrow 999992 = \pi o\lambda. 7 + 4,$$
$$900000 = 10 \cdot 90000 = \pi o\lambda. 7 + 10 = \pi o\lambda. 7 + 3 \Rightarrow 999992 = \pi o\lambda. 7.$$

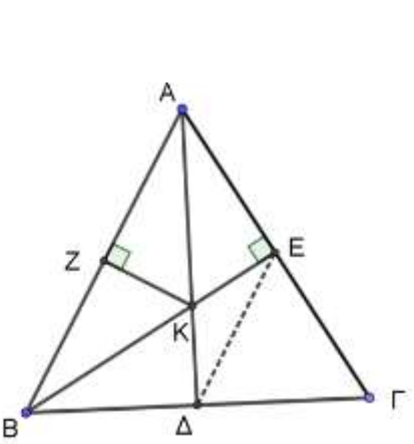
Επομένως ο ελάχιστος δυνατός θετικός ακέραιος που μπορεί να γράψει ο Γιώργος ο οποίος διαιρείται με το μεγαλύτερο δυνατό πλήθος στοιχείων του συνόλου $\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$ είναι ο αριθμός 999992. Ο αριθμός αυτός διαιρείται με τους, 2,4,8 και 7.

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)

Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η διχοτόμος ΑΔ της γωνίας $\hat{A}$, το ύψος ΒΕ και η μεσοκάθετη ΖΚ της πλευράς ΑΒ περνούν από το ίδιο σημείο Κ.

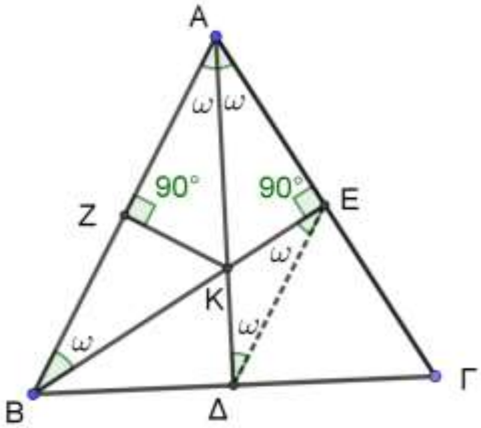
(α) Να βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

(β) Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι η ευθεία ΕΔ είναι παράλληλη προς την ευθεία ΑΒ, να αποδείξετε ότι $K\Delta = KE = KZ$.



(Σημείωση: Να σχεδιάσετε στην κόλλα σας το δικό σας σχήμα)

Λύση



(α) Αν θέσουμε $\hat{A} = 2\omega$, τότε $B\hat{A}K = K\hat{A}\Gamma = \omega$.

Επειδή ΖΚ μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ έπεται ότι $KA = KB$, δηλαδή το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισοσκελές και έχει $K\hat{B}A = K\hat{A}B = \omega$. Επομένως, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ έχουμε:

$$B\hat{A}E + A\hat{B}E = 180^0 - 90^0 \Rightarrow 2\omega + \omega = 90^0 \Rightarrow 3\omega = 90^0 \Rightarrow \omega = 30^0,$$

οπότε θα είναι $\hat{A} = 2\omega = 60^0$.

(β) Αν η ευθεία ΕΔ είναι παράλληλη προς την ευθεία ΑΒ, τότε από τις εντός εναλλάξ γωνίες που σχηματίζουν με τέμνουσες τις ευθείες ΑΔ και ΒΕ, έχουμε:

$$A\hat{\Delta}E = B\hat{A}\Delta = A\hat{B}E = K\hat{E}\Delta = \omega,$$

οπότε το τρίγωνο ΚΔΕ είναι ισοσκελές με $K\Delta = KE$.

Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)

Μία σχολική τάξη έχει συνολικά A μαθητές. Μία μαθήτρια, η Μαρία, αποφασίζει να στείλει ευχετήριες κάρτες στα υπόλοιπα παιδιά της τάξης. Όμως, ξεχνάει να βάλει γραμματόσημο σε $\frac{A}{4}$ από αυτές που είχε ετοιμάσει, οπότε στέλνει τις υπόλοιπες. Από τις υπόλοιπες, λόγω καθυστέρησης του ταχυδρομείου, μόνο το $\frac{1}{10}$ έφτασε εγκαίρως. Ποια είναι η ελάχιστη δυνατή τιμή του A;

Λύση

Η Μαρία είχε ετοιμάσει συνολικά $A - 1$ κάρτες για να στείλει σε όλους τους συμμαθητές της. Επομένως, έστειλε τελικά $(A - 1) - \frac{A}{4} = \frac{3A}{4} - 1$ κάρτες. Το $\frac{1}{10}$ αυτών είναι $\frac{1}{10}\left(\frac{3A}{4} - 1\right) = \frac{3A-4}{40}$ και πρέπει να είναι ακέραιος αριθμός, αφού αντιστοιχεί σε μαθητές που έλαβαν κάρτα εγκαίρως. Επομένως, για να βρούμε την ελάχιστη τιμή του Α, το $3A - 4$ πρέπει να είναι το μικρότερο δυνατό πολλαπλάσιο του 40. Η εξίσωση $3A - 4 = 40$, δεν δίνει ακέραια τιμή για το A, οπότε κοιτάζουμε το αμέσως επόμενο πολλαπλάσιο που είναι το 80. Η εξίσωση $3A - 4 = 80$ έχει λύση $A = 28$, επομένως αυτή είναι η ελάχιστη δυνατή τιμή του Α.