ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
81ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
6 Νοεμβρίου 2020

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)
Να αποδείξετε ότι ο ακέραιος αριθμός $A = 81^{3^n} + 4^{2n+1}$ είναι σύνθετος, για οποιονδήποτε θετικό ακέραιο αριθμό n.

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)
Ο Ανδρέας προσθέτει όλους τους θετικούς ακέραιους από το 1 μέχρι και το 2019. Ο Βασίλης προσθέτει τα τετράγωνα όλων των θετικών ακέραιων από το 1 μέχρι και το 2019. Η Γεωργία προσθέτει τα τριπλάσια των αριθμών που βρήκαν ο Ανδρέας και ο Βασίλης και στο άθροισμα που βρίσκει προσθέτει τον αριθμό 2020. Να προσδιορίσετε τον αριθμό που θα βρει η Γεωργία.

Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($AB = AΓ$) με $\hat{A} = 30°$ και έστω M, N τα μέσα των πλευρών του $ΒΓ$ και $ΑΓ$, αντίστοιχα. Ο περιγεγραμμένος κύκλος $C_{AΓM}$ του τριγώνου $ΑΓΜ$ τέμνει τη πλευρά $ΑΒ$ στο σημείο $Δ$. Να αποδείξετε ότι η κάθετη από το σημείο N προς την πλευρά $ΑΒ$ και η κάθετη από σημείο $Γ$ προς την $ΔN$ τέμνονται σε σημείο του κύκλου $C_{AΓM}$ που είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $ΑΔN$.
(***Σημείωση***: *Σε ένα τρίγωνο XYZ, ο περιγεγραμμένος κύκλος του είναι ο κύκλος που περνά από τις κορυφές του X, Y, Z. Αν O είναι το κέντρο αυτού του κύκλου, τότε OX=OY=OZ).*

Διάρκεια διαγωνισμού: 2 ώρες
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
81^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
6 Νοεμβρίου 2020

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)
Έστω $\Sigma(\nu)$ το άθροισμα των ψηφίων του θετικού ακέραιου ν. Να βρείτε όλους τους θετικούς ακέραιους ν που ικανοποιούν την ισότητα: $\Sigma(\nu)=2025-\nu$.

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ $(AB = A\Gamma)$ με $\hat{A} = 45°$. Θεωρούμε το ύψος BE του τριγώνου $AB\Gamma$, του οποίου η προέκταση τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του, έστω $C_{AB\Gamma}$, στο σημείο Δ. Η προέκταση του ύψους BE τέμνει επίσης στο σημείο Λ την εφαπτόμενη του κύκλου $C_{AB\Gamma}$ στο σημείο του Γ. Η $A\Lambda$ τέμνει τον κύκλο $C_{AB\Gamma}$ στο σημείο Z. Να αποδείξετε ότι το σημείο Δ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου $A\Gamma\Lambda$ και το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $Z\Gamma\Lambda$.

Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)
Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x)=ax^2+bx+c$, όπου οι a,b,c είναι πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $b>2a$. Αν $f(x)\geq 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x, τότε να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$A=\frac{a+b+c}{b-2a}.$$

Διάρκεια διαγωνισμού: 2 ώρες
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
81ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
6 Νοεμβρίου 2020

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)
Να βρεθούν οι περιττοί πρώτοι αριθμοί p για τους οποίους ο ακέραιος $3p-8$ ισούται με τον κύβο θετικού ακέραιου.

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)
Αν οι x, y, z είναι θετικοί ακέραιοι, να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες (x, y, z) που είναι λύσεις του συστήματος:

$$\left\{\begin{array}{c} x^3+8y-4z=-3 \\ 3x^2+y^2-2z=1 \\ 3x-4y+z^2=68 \end{array}\right\}$$

Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)
Δίνεται οξυγώνιο μη ισόπλευρο τρίγωνο $ΑΒΓ$, με $\hat{A}=60°$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $c=c(O,R)$. Δίνονται επίσης τα ύψη του $ΒΔ, ΓΕ$ καθώς και τα μέσα M, N των πλευρών του $ΑΓ$ και $ΑΒ$ αντίστοιχα. Έστω ακόμη Z το σημείο τομής των OA, EM και H το σημείο τομής των $MN, ΔE$.
(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, H, Z, M ανήκουν σε κύκλο, έστω c_1.
(β) Αν οι κύκλοι c και c_1 τέμνονται στο σημείο $Θ$, να αποδείξετε ότι τα σημεία $B, H, Θ$ είναι συνευθειακά.

Διάρκεια διαγωνισμού: 2 ώρες
Καλή επιτυχία!