ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
1 Νοεμβρίου 2014

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\mathrm{A}=\frac{13}{9}-\frac{74}{9}\cdot\frac{3}{37}+\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}:8$

Λύση

$$\mathrm{A}=\frac{13}{9}-\frac{74}{9}\cdot\frac{3}{37}+\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}:8=\frac{13}{9}-\frac{74\cdot 3}{9\cdot 37}+\left(\frac{4}{3}\right)^{2}:8$$
$$=\frac{13}{9}-\frac{2}{3}+\frac{16}{9}:8=\frac{13}{9}-\frac{2}{3}+\frac{16:8}{9}=\frac{13}{9}-\frac{6}{9}+\frac{2}{9}=\frac{9}{9}=1.$$

Πρόβλημα 2

Ένας έμπορος συλλεκτικών αντικειμένων αγόρασε δύο παλαιά ραδιόφωνα Α κα Β αντί 200 ευρώ και στη συνέχεια τα πούλησε με συνολικό κέρδος 40% πάνω στην τιμή της αγοράς τους. Αν το ραδιόφωνο Α πουλήθηκε με κέρδος 25% και το ραδιόφωνο Β πουλήθηκε με κέρδος 50%, πάνω στην τιμή της αγοράς τους, να βρείτε πόσο πλήρωσε ο έμπορος για να αγοράσει το καθένα από τα ραδιόφωνα Α και Β.

Λύση

Έστω ότι ο έμπορος αγόρασε x ευρώ το ραδιόφωνο Α. Τότε η τιμή αγοράς του ραδιοφώνου Β ήταν $200-x$ ευρώ. Τότε το ραδιόφωνο Α πουλήθηκε $x+\frac{25x}{100}=\frac{125x}{100}$ ευρώ, ενώ το ραδιόφωνο Β πουλήθηκε $(200-x)\cdot\frac{150}{100}$ ευρώ. Συνολικά τα δύο ραδιόφωνα πουλήθηκαν $200\cdot\frac{140}{100}$ ευρώ, δηλαδή 280 ευρώ.

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει η εξίσωση

$$\frac{125x}{100}+(200-x)\cdot\frac{150}{100}=200\cdot\frac{140}{100}\Leftrightarrow 12,5x-15x+3000=2800$$
$$\Leftrightarrow 2,5x=200\Leftrightarrow x=80.$$

Άρα ο έμπορος αγόρασε 80 ευρώ το ραδιόφωνο Α και $200-80=120$ ευρώ το ραδιόφωνο Β.

Πρόβλημα 3

Χωρίς την εκτέλεση διαιρέσεων αριθμητή με παρανομαστή, να βρείτε τον μεγαλύτερο και τον μικρότερο από τους παρακάτω αριθμούς:

$$\frac{1003}{2015}, \frac{1007}{2019}, \frac{1009}{2021}, \frac{997}{2009}, \frac{1011}{2023}, \frac{999}{2011}, \frac{1001}{2013}, \frac{1005}{2017}.$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι σε όλα τα δεδομένα κλάσματα την ίδια διαφορά:

(Παρανομαστής) - (Αριθμητής) = 1012.

Έτσι γράφουμε:

$$\frac{1003}{2015}=1-\frac{1012}{2015}, \frac{1007}{2019}=1-\frac{1012}{2019}, \frac{1009}{2021}=1-\frac{1012}{2021}, \frac{997}{2009}=1-\frac{1012}{2009}$$

$$\frac{1011}{2023}=1-\frac{1012}{2023}, \frac{999}{2011}=1-\frac{1012}{2011}, \frac{1001}{2013}=1-\frac{1012}{2013}, \frac{1005}{2017}=1-\frac{1012}{2017}$$

Γνωρίζουμε ότι μεταξύ ρητών αριθμών με τον ίδιο αριθμητή, μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει μικρότερο παρανομαστή, οπότε έχουμε:

$$\frac{1012}{2009}>\frac{1012}{2011}>\frac{1012}{2013}>\frac{1012}{2015}>\frac{1012}{2017}>\frac{1012}{2019}>\frac{1012}{2021}>\frac{1012}{2023}$$

Άρα έχουμε:

$$1-\frac{1012}{2009}<1-\frac{1012}{2011}<1-\frac{1012}{2013}<1-\frac{1012}{2015}<1-\frac{1012}{2017}<1-\frac{1012}{2019}<1-\frac{1012}{2021}<1-\frac{1012}{2023},$$

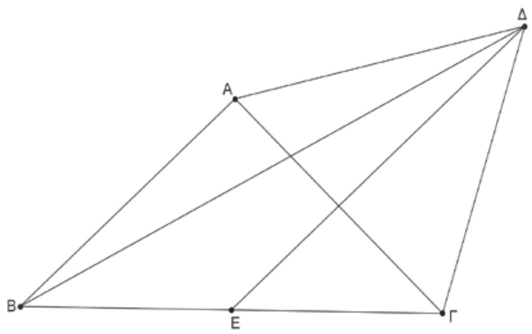
οπότε ο αριθμός $\frac{1011}{2023}$ είναι ο μεγαλύτερος από τους δεδομένους ρητούς αριθμούς, ενώ ο $\frac{997}{2009}$ είναι ο μικρότερος.

Πρόβλημα 4

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με $\hat{A}=90^\circ$ και $AB=A\Gamma$. Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισόπλευρο και το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευρά ΒΓ.

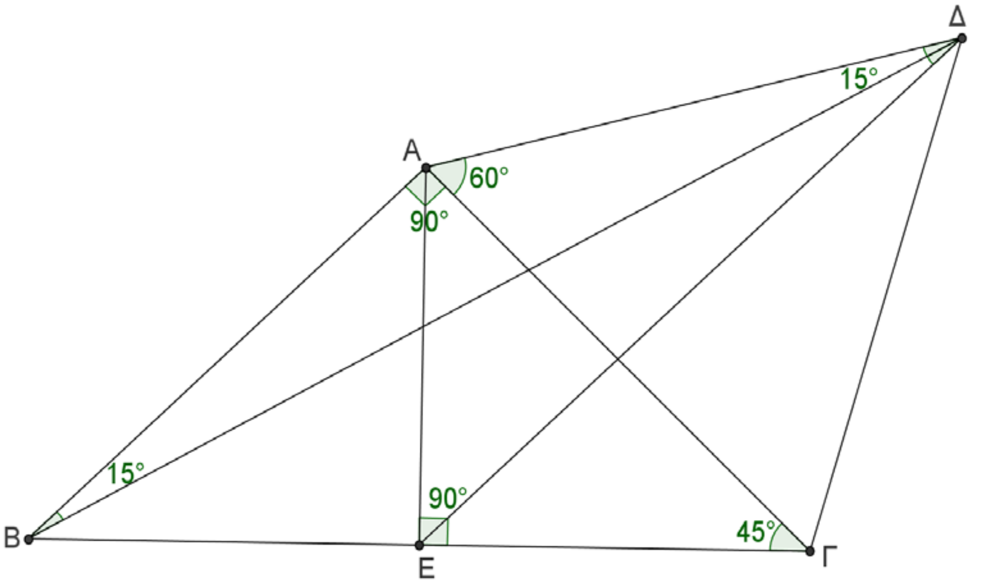
(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΕ είναι μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.

(β) Βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $B\hat{\Delta}E$.



Σχήμα 1

Λύση



Σχήμα 2

(α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές θα έχει $\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}=45^\circ$ και η διάμεσός του ΑΕ είναι και ύψος του, οπότε το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ορθογώνιο στο Ε με μία γωνία του 45°. Επομένως θα έχει $\mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\Gamma=180^\circ-\left(90^\circ+45^\circ\right)=45^\circ$, οπότε αυτό είναι ισοσκελές με $\mathrm{EA}=\mathrm{E}\Gamma$.

Επιπλέον, από το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε ότι: $\Delta\mathrm{A}=\Delta\Gamma$. Επομένως τα σημεία Δ και Ε ισαπέχουν από τα άκρα Α και Γ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ, οπότε η ευθεία ΔΕ είναι η μεσοκάθετη του ΑΓ.

(β) Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ λαμβάνουμε τις ισότητες $\mathrm{AB}=\mathrm{A}\Gamma=\mathrm{A}\Delta$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές. Από το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε $\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma=60^\circ$, οπότε $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B}=\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma+\Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B}=60^\circ+90^\circ=150^\circ$. Επειδή ΑΒΔ ισοσκελές τρίγωνο έπεται ότι:

$$\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}=\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta=\frac{180^\circ-150^\circ}{2}=15^\circ.$$

Επειδή οι ευθείες ΑΒ και ΔΕ είναι παράλληλες, ως κάθετες προς την ίδια ευθεία ΑΓ, που τις τέμνει η ευθεία ΒΔ, σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες του ίσες, οπότε:

$$\mathrm{B}\hat{\Delta}\mathrm{E}=\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta=15^\circ$$

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\mathrm{A}=\dfrac{x^4-1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-3\right)}-\dfrac{6}{13}$, αν $x=\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{-2}$.

Λύση

Έχουμε

$$\mathrm{A}=\frac{x^4-1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-3\right)}-\frac{6}{13}=\frac{\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-3\right)}-\frac{6}{13}=\frac{x^2-1}{x^2-3}-\frac{6}{13},$$

οπότε για $x=\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}=\left(-\frac{4}{3}\right)^{2}=\frac{16}{9}$ λαμβάνουμε:

$$A=\frac{x^2-1}{x^2-3}-\frac{6}{13}=\frac{\left(\frac{16}{9}\right)^2-1}{\left(\frac{16}{9}\right)^2-3}-\frac{6}{13}=\frac{\frac{256}{81}-1}{\frac{256}{81}-3}-\frac{6}{13}=\frac{175}{13}-\frac{6}{13}=\frac{169}{13}=13.$$

2^{ος} τρόπος

Για όσους δεν γνωρίζουν την παραγοντοποίηση της διαφοράς δύο τετραγώνων, προτείνουμε την ακόλουθη λύση:

Έχουμε $x=\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}=\left(-\frac{4}{3}\right)^{2}=\frac{16}{9}$, οπότε:

$$A=\frac{\left(\frac{16}{9}\right)^4-1}{\left(\left(\frac{16}{9}\right)^2+1\right)\left(\left(\frac{16}{9}\right)^2-3\right)}-\frac{6}{13}=\frac{\frac{256\cdot 256-81\cdot 81}{81^2}}{\left(\frac{256+81}{81}\right)\left(\frac{256-243}{81}\right)}-\frac{6}{13}$$

$$=\frac{\frac{65536-6561}{81^2}}{\left(\frac{337}{81}\right)\left(\frac{13}{81}\right)}-\frac{6}{13}=\frac{\frac{58975}{81^2}}{\frac{337\cdot 13}{81^2}}-\frac{6}{13}=\frac{58975}{337\cdot 13}-\frac{6}{13}=\frac{175}{13}-\frac{6}{13}=\frac{169}{13}=13.$$

Πρόβλημα 2

Το πλήθος των μαθητών σε ένα Γυμνάσιο είναι τουλάχιστον 170 και το πολύ 230. Αν γνωρίζουμε ότι ακριβώς το 4% των μαθητών παίζουν βιολί και ότι το $\frac{1}{3}$ από αυτούς που παίζουν βιολί, παίζει και πιάνο, να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου.

Λύση

Έστω n το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου. Τότε το πλήθος των μαθητών που παίζει βιολί είναι $\frac{4n}{100}$. Το πλήθος των μαθητών που παίζει και βιολί και πιάνο είναι

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{4n}{100}=\frac{4n}{300}=\frac{n}{75}.$$

Επειδή ο αριθμός των μαθητών του Γυμνασίου είναι θετικός ακέραιος, πρέπει ο αριθμητής n να είναι πολλαπλάσιο του παρανομαστή, δηλαδή πρέπει $n=75k$, όπου k θετικός ακέραιος..

Έτσι, από την υπόθεση $170\le n\le 230$, έχουμε:

$$170\le n=75k\le 230 \Leftrightarrow \frac{170}{75}\le k\le\frac{230}{75}\Leftrightarrow 2+\frac{20}{75}\le k\le 3+\frac{5}{75}\Leftrightarrow k=3.$$

Επομένως έχουμε $n=75\cdot 3=225$ μαθητές.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ πλευρά α. Προεκτείνουμε την πλευρά $\mathrm{A\Gamma}$ κατά τμήμα $\Gamma\Delta = \frac{\alpha}{2}$ και στη συνέχεια προεκτείνουμε την πλευρά $\mathrm{B\Gamma}$ κατά τμήμα $\Gamma\mathrm{Z} = \mathrm{A}\Delta$. Αν $\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta)$ και $\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta\mathrm{Z})$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου $\mathrm{AB}\Delta$ και του τετραπλεύρου $\mathrm{AB}\Delta\mathrm{Z}$, αντίστοιχα, να βρείτε το λόγο $\frac{\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta)}{\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta\mathrm{Z})}$.

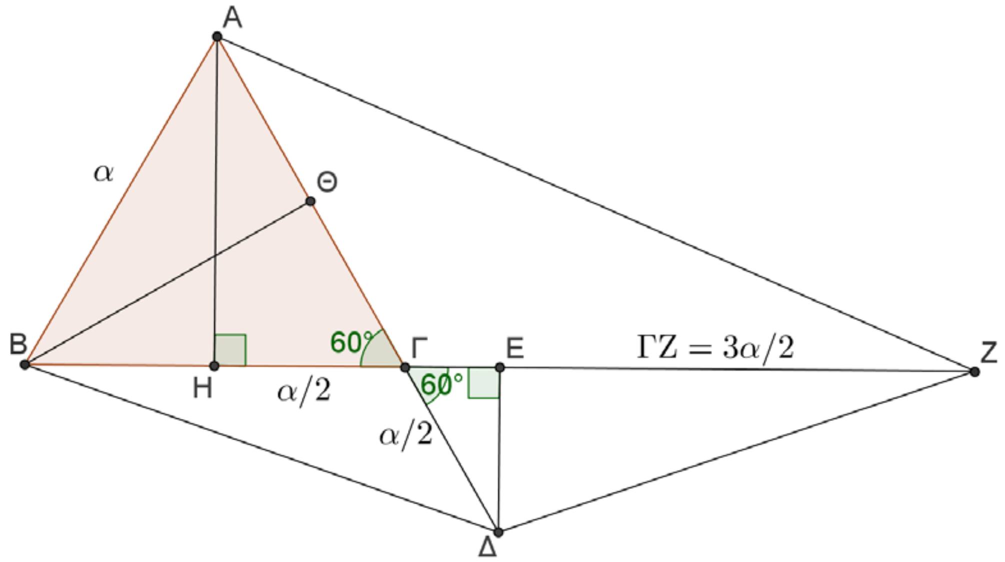
Λύση

Το τρίγωνο $\mathrm{AB}\Delta$ έχει βάση $\mathrm{A}\Delta = \frac{3\alpha}{2}$ και ύψος

$$\mathrm{B}\Theta = \mathrm{AH} = \sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3\alpha^2}{4}} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}.$$

Άρα είναι:

$$\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta) = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{A}\Delta \cdot \mathrm{B}\Theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{3\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}\alpha^2}{8}.$$



Σχήμα 3

Για το τετράπλευρο $\mathrm{AB}\Delta\mathrm{Z}$ έχουμε: $\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta\mathrm{Z}) = \mathrm{E}(\mathrm{ABZ}) + \mathrm{E}(\mathrm{B}\Delta\mathrm{Z})$.

Στο τρίγωνο ABZ έχουμε βάση $\mathrm{BZ} = \alpha + \frac{3\alpha}{2} = \frac{5\alpha}{2}$ και ύψος $\mathrm{AH} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$, οπότε έχει εμβαδό

$$\mathrm{E}(\mathrm{ABZ}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{8}.$$

Στο τρίγωνο $\mathrm{B}\Delta\mathrm{Z}$ έχουμε βάση $\mathrm{BZ} = \frac{5\alpha}{2}$ και ύψος $\Delta\mathrm{E}$ το οποίο μπορεί να υπολογιστεί από τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα $\mathrm{AH\Gamma}$ και $\Gamma\mathrm{E}\Delta$ ως εξής:

$$\frac{\mathrm{E\Delta}}{\mathrm{AH}}=\frac{\Gamma\Delta}{\mathrm{A\Gamma}}\Leftrightarrow\frac{\mathrm{E\Delta}}{\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{\alpha}{2}}{\alpha}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \mathrm{E\Delta}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{4}.$$

Διαφορετικά, μπορούμε να έχουμε: $\mathrm{E\Delta}=\Gamma\Delta\eta\mu 60^\circ=\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{4}.$

Άρα έχουμε:

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{B\Delta Z}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{5\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{4}=\frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{16}.$$

Επομένως έχουμε:

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{AB\Delta Z}\right)=\mathrm{E}\left(\mathrm{ABZ}\right)+\mathrm{E}\left(\mathrm{B\Delta Z}\right)=\frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{8}+\frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{16}=\frac{15\sqrt{3}\alpha^2}{16},$$

οπότε θα είναι

$$\frac{\mathrm{E}\left(\mathrm{AB\Delta}\right)}{\mathrm{E}\left(\mathrm{AB\Delta Z}\right)}=\frac{\frac{3\sqrt{3}\alpha^2}{8}}{\frac{15\sqrt{3}\alpha^2}{16}}=\frac{6\sqrt{3}\alpha^2}{15\sqrt{3}\alpha^2}=\frac{2}{5}.$$

2^{ος} τρόπος

Έστω Ε(ΑΒΓ) = Ε. Τότε Ε(ΒΓΔ) = $\frac{\mathrm{E}}{2}$, γιατί έχει το ίδιο ύψος ΒΘ με το τρίγωνο ΑΒΓ και βάση ΓΔ = $\frac{\alpha}{2}$. Άρα είναι:

$$\mathrm{E(AB\Delta)=E(AB\Gamma)+E(B\Gamma\Delta)}=\frac{3\mathrm{E}}{2}.$$

Ακόμα έχουμε: Ε(ΑΓΖ) = $\frac{3\mathrm{E}}{2}$, γιατί έχει το ίδιο ύψος ΑΗ με το τρίγωνο ΑΒΓ και βάση ΓΖ = $\frac{3\alpha}{2}$. Τέλος έχουμε Ε(ΓΔΖ) = $\frac{3\mathrm{E}}{4}$, γιατί έχει το ίδιο ύψος ΔΕ με το τρίγωνο ΒΓΔ και βάση ΓΖ = $\frac{3\alpha}{2}$. Έτσι έχουμε:

$$\mathrm{E(AB\Delta Z)}=\mathrm{E}+\frac{\mathrm{E}}{2}+\frac{3\mathrm{E}}{2}+\frac{3\mathrm{E}}{4}=\frac{15\mathrm{E}}{4}$$

και επομένως

$$\frac{\mathrm{E}\left(\mathrm{AB\Delta}\right)}{\mathrm{E}\left(\mathrm{AB\Delta Z}\right)}=\frac{3\mathrm{E}/2}{15\mathrm{E}/4}=\frac{2}{5}.$$

Πρόβλημα 4

Ένα διαμάντι Δ κόβεται σε δύο κομμάτια Δ_1 και Δ_2 με βάρη $\beta\left(\Delta_1\right)$ και $\beta\left(\Delta_2\right)$, αντίστοιχα, και λόγο βαρών $\frac{\beta\left(\Delta_1\right)}{\beta\left(\Delta_2\right)}=\frac{3}{7}$. Δίνεται ότι η αξία ενός διαμαντιού είναι ευθέως ανάλογη προς το τετράγωνο του βάρους του.

Να προσδιορίσετε πόσο επί τις εκατό μειώθηκε η αξία του διαμαντιού Δ μετά την κοπή του στα δύο κομμάτια Δ_1 και Δ_2.

Λύση

Έστω $\alpha(\Delta)$, $\alpha(\Delta_1)$ και $\alpha(\Delta_2)$ η αξία των διαμαντιών Δ, Δ_1 και Δ_2, αντίστοιχα. Τότε έχουμε

$$\frac{\alpha(\Delta)}{\beta(\Delta)^2} = \frac{\alpha(\Delta_1)}{\beta(\Delta_1)^2} = \frac{\alpha(\Delta_2)}{\beta(\Delta_2)^2} = \lambda$$

$$\Rightarrow \alpha(\Delta) = \lambda\beta(\Delta)^2, \alpha(\Delta_1) = \lambda\beta(\Delta_1)^2, \alpha(\Delta_2) = \lambda\beta(\Delta_2)^2$$

Άρα έχουμε

$$\frac{\alpha(\Delta_1)+\alpha(\Delta_2)}{\alpha(\Delta)} = \frac{\lambda\beta(\Delta_1)^2 + \lambda\beta(\Delta_2)^2}{\lambda\beta(\Delta)^2} = \frac{\beta(\Delta_1)^2 + \beta(\Delta_2)^2}{\beta(\Delta)^2} = \frac{\beta(\Delta_1)^2}{\beta(\Delta)^2} + \frac{\beta(\Delta_2)^2}{\beta(\Delta)^2} \quad (1)$$

Όμως από την υπόθεση έχουμε:

$$\frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta_2)} = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{\beta(\Delta_1)}{3} = \frac{\beta(\Delta_2)}{7} = \frac{\beta(\Delta_1)+\beta(\Delta_2)}{3+7} = \frac{\beta(\Delta)}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta)} = \frac{3}{10}, \frac{\beta(\Delta_2)}{\beta(\Delta)} = \frac{7}{10} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) λαμβάνουμε

$$\frac{\alpha(\Delta_1)+\alpha(\Delta_2)}{\alpha(\Delta)} = \frac{\beta(\Delta_1)^2}{\beta(\Delta)^2} + \frac{\beta(\Delta_2)^2}{\beta(\Delta)^2} = \left(\frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta)}\right)^2 + \left(\frac{\beta(\Delta)}{\beta(\Delta)}\right)^2 = \frac{9}{100} + \frac{49}{100} = \frac{58}{100}.$$

Επομένως η αξία των δύο κομματιών του διαμαντιού ισούται με το 58% της αρχικής αξίας του, δηλαδή η αξία του μειώθηκε κατά 100-58 = 42%.

2ος τρόπος

Επειδή στον πρώτο τρόπο διαπιστώνουμε στη σχέση (1) ότι ο λόγος $\dfrac{\alpha(\Delta_1)+\alpha(\Delta_2)}{\alpha(\Delta)}$ εξαρτάται από τους λόγους των βαρών $\dfrac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta)}$ και $\dfrac{\beta(\Delta_2)}{\beta(\Delta)}$, μπορούμε, χωρίς απώλεια της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι $\beta(\Delta_1) = 3$ και $\beta(\Delta_1) = 7$ με $\beta(\Delta) = 10$.

Έτσι, αν υποθέσουμε ότι η αξία του τετραγώνου της μονάδας βάρους είναι 1, τότε έχουμε ότι $\alpha(\Delta_1) = 3^2 = 9$ και $\alpha(\Delta_2) = 7^2 = 49$ και $\alpha(\Delta) = 10^2 = 100$. Επομένως η μείωση της αξίας του διαμαντιού είναι $100 - (9+49) = 42$, δηλαδή σε ποσοστό 42%.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να βρείτε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\frac{2015^3+2013^3}{2014^2+4029^2}+\frac{2016^3+2012^3-18\cdot 2014}{2014^2+4027^2}-\frac{4\cdot 2014\cdot\left(2014^2+3\right)\left(5\cdot 2014^2+1\right)}{\left(5\cdot 2014^2+1\right)^2-\left(4\cdot 2014\right)^2}.$$

Λύση
Επειδή οι εμφανιζόμενες πράξεις είναι πολλές και χρονοβόρες, προσπαθούμε με κατάλληλη αντικατάσταση, να μετασχηματίσουμε την αριθμητική παράσταση σε αλγεβρική. Η παράσταση που προκύπτει μετά την απλοποίησή της οδηγεί τελικά σε απλό υπολογισμό της δεδομένης αριθμητικής παράστασης. Έτσι, αν θέσουμε $x=2014,$ η παράσταση γίνεται:

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\frac{(x+1)^3+(x-1)^3}{x^2+(2x+1)^2}+\frac{(x+2)^3+(x-2)^3-18x}{x^2+(2x-1)^2}-\frac{4x\left(x^2+3\right)\left(5x^2+1\right)}{\left(5x^2+1\right)^2-(4x)^2}\\&=\frac{2x\left(x^2+3\right)}{5x^2+4x+1}+\frac{2x\left(x^2+3\right)}{5x^2-4x+1}-\frac{4x\left(x^2+3\right)\left(5x^2+1\right)}{\left(5x^2+4x+1\right)\left(5x^2-4x+1\right)}\\&=2x\left(x^2+3\right)\left[\frac{1}{5x^2+4x+1}+\frac{1}{5x^2-4x+1}-\frac{2\left(5x^2+1\right)}{\left(5x^2+4x+1\right)\left(5x^2-4x+1\right)}\right]\\&=2x\left(x^2+3\right)\left(\frac{5x^2-4x+1+5x^2+4x+1-10x^2-2}{\left(5x^2+4x+1\right)\left(5x^2-4x+1\right)}\right)=2x\left(x^2+3\right)\cdot 0=0.\end{aligned}$$

Άρα είναι

$$\mathrm{A}=\frac{2015^3+2013^3}{2014^2+4029^2}+\frac{2016^3-2012^3-18\cdot 2014}{2014^2+4027^2}-\frac{4\cdot 2014\cdot\left(2014^2+3\right)\left(5\cdot 2014^2+1\right)}{\left(5\cdot 2014^2+1\right)^2-\left(4\cdot 2014\right)^2}=0$$

Πρόβλημα 2
Ένα βιβλίο μαθηματικών κυκλοφορεί σε 2 τόμους Α και Β. 100 αντίτυπα του τόμου Α και 120 αντίτυπα του τόμου Β κοστίζουν συνολικά 4000 ευρώ. Ένα βιβλιοπωλείο πούλησε 50 αντίτυπα του τόμου Α με έκπτωση 10% και 60 αντίτυπα του τόμου Β με έκπτωση 20% και εισέπραξε συνολικά 1680 ευρώ. Να προσδιορίσετε την τιμή πώλησης του ενός βιβλίου από κάθε τόμο.

Λύση
Έστω ότι η τιμή πώλησης του τόμου Α είναι x ευρώ και τόμου Β είναι y ευρώ. Από τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$100x+120y=4000\Leftrightarrow 5x+6y=200 \qquad (1)$$

$$50\cdot\frac{90x}{100}+60\cdot\frac{80y}{100}=1680\Leftrightarrow 45x+48y=1680 \qquad (2)$$

Έτσι έχουμε το σύστημα

$$\begin{Bmatrix} 5x+6y=200 \\ 45x+48y=1680 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 45x+54y=1800 \\ 45x+48y=1680 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 6y=120 \\ 45x+48y=1680 \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y=20 \\ x=\dfrac{1680-48y}{45} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y=20 \\ x=16 \end{Bmatrix}.$$

Άρα η τιμή πώλησης του τόμου Α ήταν 16 ευρώ και του τόμου Β ήταν 20 ευρώ.

Πρόβλημα 3

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$\mathrm{A}=\left(x^2+y^2+xy\right)^2 \quad \text{και} \quad \mathrm{B}=2\left[\left(x^2+y^2+2xy\right)^2+x^4+y^4\right],$$

όπου x, y είναι ρητοί.

(α) Να γράψετε την παράσταση Α ως πολυώνυμο των μεταβλητών x, y διατεταγμένο ως προς τις φθίνουσες δυνάμεις του x.

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt{\mathrm{B}}$ είναι ρητός για οποιαδήποτε τιμή των ρητών αριθμών x, y.

Λύση

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\left(x^2+y^2+xy\right)^2=\left(x^2+y^2+xy\right)\left(x^2+y^2+xy\right)\\ &=x^4+y^4+x^2y^2+2x^2y^2+2x^3y+2xy^3\\ &=x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4.\end{aligned}$$

Διαφορετικά μπορούμε να έχουμε:

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\left(x^2+y^2+xy\right)^2=\left(x^2+y^2\right)^2+\left(xy\right)^2+2\left(x^2+y^2\right)xy\\ &=x^4+y^4+2x^2y^2+x^2y^2+2x^3y+2xy^3\\ &=x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4.\end{aligned}$$

(β) Έχουμε, όπως στο προηγούμενο ερώτημα, ότι:

$$\left(x^2+y^2+2xy\right)^2=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{B}&=2\left[\left(x^2+y^2+2xy\right)^2+x^4+y^4\right]=2\left[x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4+x^4+y^4\right]\\ &=2\left[2x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+2y^4\right]=4\left(x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4\right)\\ &=4\left(x^2+y^2+xy\right)^2,\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία σχέση χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α)

Άρα έχουμε

$$\sqrt{\mathrm{B}}=\left|2\left(x^2+xy+y^2\right)\right|=2\left(x^2+xy+y^2\right)\in\mathbb{Q},$$

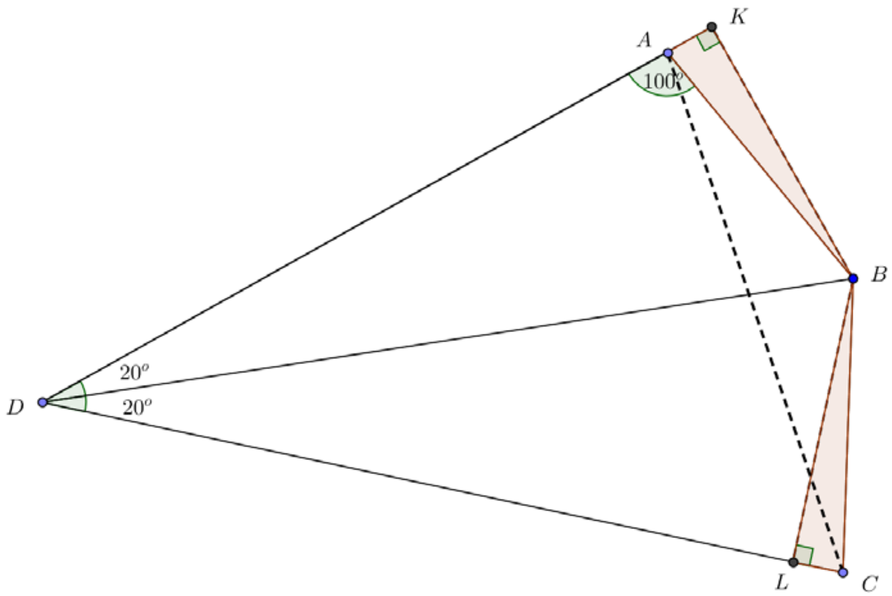
αφού οι αριθμοί x, y είναι ρητοί και $x^2+xy+y^2=\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3y^2}{4}\geq 0.$

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε τετράπλευρο $ABCD$ με τη γωνία $\hat{A} = 100^\circ$ και $\hat{D} = 40^\circ$. Αν DB είναι διχοτόμος της γωνίας $C\hat{D}A$ και $DB = DC$, να υπολογισθεί το μέτρο της γωνίας $C\hat{A}B$.

Λύση

Εφόσον η DB είναι διχοτόμος της γωνίας $C\hat{D}A$, θα έχουμε ότι $C\hat{D}B = B\hat{D}A = 20^\circ$ και από το ισοσκελές τρίγωνο DBC θα έχουμε ότι $D\hat{B}C = D\hat{C}B = 80^\circ$ και επιπλέον έχουμε ότι $D\hat{B}A = 180^\circ - \left(100^\circ + 20^\circ\right) = 60^\circ$. Αν τώρα φέρουμε τις προβολές BK και BL, αφού το B είναι σημείο της διχοτόμου, θα έχουμε ότι $BK = BL$ και $B\hat{A}K = 80^\circ$, οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα BAK και BLC είναι ίσα, που σημαίνει ότι $BA = BC$. Επομένως, από το ισοσκελές τρίγωνο BAC παίρνουμε ότι: $C\hat{A}B = 20^\circ$.



Σχήμα 4

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Έστω k ένας ακέραιος και x ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Να συγκριθούν οι αριθμοί:

$$\mathrm{A} = \frac{x^k + 1}{x^{k+1} + 1} \text{ και } \mathrm{B} = \frac{x^{k+1} + 1}{x^{k+2} + 1}.$$

Λύση (1ος τρόπος)

Θεωρούμε τη διαφορά των δύο αριθμών και έχουμε:

$$\mathrm{A}-\mathrm{B}=\frac{x^k+1}{x^{k+1}+1}-\frac{x^{k+1}+1}{x^{k+2}+1}=\frac{\left(x^k+1\right)\left(x^{k+2}+1\right)-\left(x^{k+1}+1\right)^2}{\left(x^{k+1}+1\right)\left(x^{k+2}+1\right)}$$

$$=\frac{x^{k+2}+x^k+1-2x^{k+1}-1}{\left(x^{k+1}+1\right)\left(x^{k+2}+1\right)}=\frac{x^{k+2}+x^k-2x^{k+1}}{\left(x^{k+1}+1\right)\left(x^{k+2}+1\right)}=\frac{x^k\left(x-1\right)^2}{\left(x^{k+1}+1\right)\left(x^{k+2}+1\right)},$$

οπότε, αφού $x>0$ και k ακέραιος, έχουμε:

$$\mathrm{A}-\mathrm{B}=\left\{\begin{array}{ll}0, & \text{αν } x=1\\ >0, & \text{αν } 0<x\neq 1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ll}\mathrm{A}=\mathrm{B}, & \text{αν } x=1\\ \mathrm{A}>\mathrm{B}, & \text{αν } 0<x\neq 1\end{array}\right\}.$$

2^{ος} τρόπος

Έχουμε ότι

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\frac{(x^k+1)(x^{k+2}+1)}{(x^{k+1}+1)^2}=\frac{x^{2k+2}+x^k+x^{k+2}+1}{(x^{k+1}+1)^2}$$

$$=1+\frac{x^{k+2}+x^k-2x^{k+1}}{(x^{k+1}+1)^2}=1+\frac{x^k(x-1)^2}{(x^{k+1}+1)^2}\geq 1.$$

Η ισότητα στην τελευταία ισχύει, αν, και μόνο αν, $x=1$.
Επομένως έχουμε ότι:

$$\mathrm{A}=\mathrm{B},\ \text{αν } x=1 \text{ και } \mathrm{A}>\mathrm{B},\ \text{αν } 0<x\neq 1.$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη ακεραίων (x,y) που είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$2x^2-10xy+13y^2+2\left|x-y\right|=5$$

Λύση

Η εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$2x^2-10xy+13y^2=5-2\left|x-y\right| \qquad (1)$$

Η παράσταση του πρώτου μέλους γράφεται:

$$2x^2-10xy+13y^2=2\left(x^2-5xy+\frac{25y^2}{4}\right)+13y^2-\frac{25y^2}{2}=2\left(x-\frac{5y}{2}\right)^2+\frac{y^2}{2}\geq 0,$$

όπου η ισότητα ισχύει αν, και μόνον αν: $x-\frac{5y}{2}=y=0\Leftrightarrow x=y=0$.

Επομένως για το δεύτερο μέλος της εξίσωσης (1) πρέπει να ισχύει:

$$5-2\left|x-y\right|\geq 0\Leftrightarrow\left|x-y\right|\leq\frac{5}{2}\Leftrightarrow\left|x-y\right|\in\{0,1,2\},$$

οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

1. $\left|x-y\right|=0\Leftrightarrow x=y$. Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$2x^2-10x^2+13x^2=5\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=1,$$

οπότε προκύπτουν οι λύσεις: $(x,y)=(-1,-1)$ ή $(x,y)=(1,1)$.

2. $\left|x-y\right|=1\Leftrightarrow x-y=1$ ή $x-y=-1\Leftrightarrow x=y+1$ ή $x=y-1$.

Για $x=y\pm 1$ η εξίσωση γίνεται: $2\left(y\pm 1\right)^2-10\left(y\pm 1\right)y+13y^2=3$

$\Leftrightarrow 5y^2 \mp 6y - 1 = 0$, η οποία δεν έχει ακέραιες λύσεις αφού η διακρίνουσα της είναι $\Delta = 56$

3. $|x-y| = 2 \Leftrightarrow x-y=2$ ή $x-y=-2 \Leftrightarrow x=y+2$ ή $x=y-2$.

Για $x=y+2$ η εξίσωση γίνεται: $2(y+2)^2 - 10(y+2)y + 13y^2 = 1$

$\Leftrightarrow 5y^2 - 12y + 7 = 0$, η οποία έχει ακέραιες λύσεις αφού η διακρίνουσα της είναι $\Delta = 4$ και έχει ρίζες $y = \dfrac{12 \pm 2}{10} \Leftrightarrow y=1$ ή $y=\dfrac{7}{5}$.

Άρα προκύπτει η λύση $(x,y)=(3,1)$

Για $x=y-2$ η εξίσωση γίνεται: $2(y-2)^2 - 10(y-2)y + 13y^2 = 1$

$\Leftrightarrow 5y^2 + 12y + 7 = 0$, η οποία έχει ακέραιες λύσεις αφού η διακρίνουσα της είναι $\Delta = 4$ και έχει ρίζες $y = \dfrac{-12 \pm 2}{10} \Leftrightarrow y=-1$ ή $y=-\dfrac{7}{5}$.

Άρα προκύπτει η λύση $(x,y)=(-3,-1)$.

Επομένως η εξίσωση έχει τις λύσεις: $(-1,-1)$, $(1,1),(3,1),(-3,-1)$.

Πρόβλημα 3

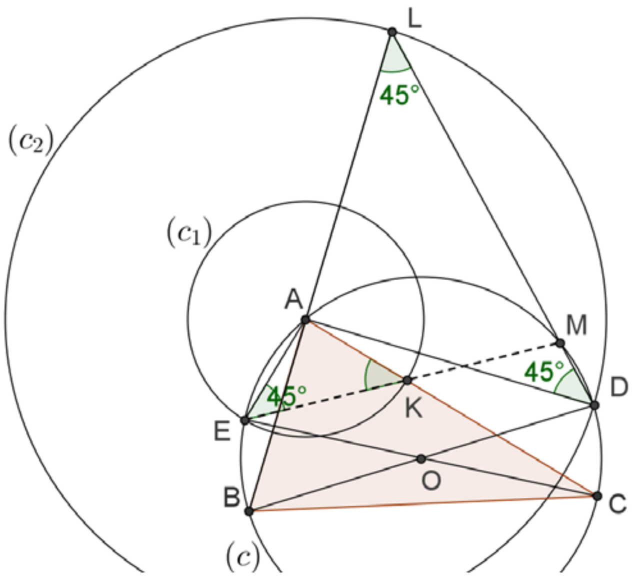
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC (με $AB < AC < BC$) εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) (με κέντρο O και ακτίνα R) και έστω D, E τα αντιδιαμετρικά σημεία των B, C, αντίστοιχα (ως προς τον κύκλο (c)). Ο κύκλος (c_1) (με κέντρο A και ακτίνα AE), τέμνει την AC στο σημείο K. Ο κύκλος (c_2) (με κέντρο A και ακτίνα AD), τέμνει την προέκταση της AB (προς το μέρος του A) στο σημείο L. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες EK και DL τέμνονται πάνω στο κύκλο (c).

Λύση

Έστω M το σημείο τομής της DL με τον κύκλο (c) θα αποδείξουμε ότι τα σημεία E, K, M βρίσκονται επάνω στον ίδια ευθεία.

Η γωνία $E\hat{A}C$ είναι ορθή, διότι βαίνει στη διάμετρο EC του κύκλου (c). Το τρίγωνο AEK είναι ισοσκελές (διότι AE, AK είναι ακτίνες του κύκλου (c_1)). Άρα:

$$A\hat{E}K = A\hat{K}E = 45^\circ. \qquad (1)$$



Σχήμα 5

Η γωνία $\mathrm{B\hat{A}D}$ είναι ορθή, γιατί βαίνει στη διάμετρο BD του κύκλου (c), οπότε και η γωνία $\mathrm{D\hat{A}L}$ είναι ορθή. Το τρίγωνο ADL είναι ισοσκελές (διότι AD, AL είναι ακτίνες του κύκλου (c_2)). Άρα έχουμε

$$\mathrm{A\hat{D}L} = \mathrm{A\hat{L}D} = 45^\circ. \qquad (2)$$

Οι γωνίες $\mathrm{A\hat{D}M}$=$\mathrm{A\hat{D}L}$ και $\mathrm{A\hat{E}M}$ είναι ίσες, γιατί είναι εγγεγραμμένες στο κύκλο (c) και βαίνουν στο τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{AM}}$, δηλαδή

$$\mathrm{A\hat{E}M} = \mathrm{A\hat{D}L} \qquad (3)$$

Άρα από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει η ισότητα $\mathrm{A\hat{E}K} = \mathrm{A\hat{E}M} = 45^\circ$, οπότε τα σημεία E, K, M είναι συνευθειακά.

Πρόβλημα 4

Σε έναν διαγωνισμό που η μέγιστη δυνατή βαθμολογία ήταν 100 έλαβαν μέρος x μαθητές. Οκτώ μαθητές πήραν βαθμό 100, ενώ όλοι οι υπόλοιποι πήραν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 70. Αν ο μέσος όρος των βαθμών των μαθητών ήταν 78, να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του πλήθους των μαθητών.

Λύση

Για το άθροισμα των βαθμών όλων των μαθητών έχουμε τη σχέση

$$\Sigma_x \geq 8\cdot 100 + (x-8)\cdot 70 \Leftrightarrow \Sigma_x \geq 70x + 240, \qquad (1)$$

οπότε για το μέσο όρο των βαθμών έχουμε:

$$\text{M.O.} = \frac{\Sigma_x}{x} \geq \frac{70x+240}{x} = 70 + \frac{240}{x}\ . \qquad (2)$$

Έχοντας υπόψη ότι ο μέσος όρος της βαθμολογίας των μαθητών είναι 78, αν υποθέσουμε ότι ισχύει $x < 30$, τότε από τη σχέση (2) λαμβάνουμε:

$$\text{M.O.} = \frac{\Sigma_x}{x} \geq 70 + \frac{240}{x} > 70 + \frac{240}{30} = 78, \qquad (3)$$

που είναι αντίθετο προς την υπόθεση ότι ο μέσος όρος των βαθμών είναι 78.

Επομένως δεν είναι δυνατόν να ισχύει ότι $x<30$, οπότε πρέπει να είναι $x \geq 30$.

Παρατηρούμε ότι για $x=30$, έχουμε την περίπτωση

$$\text{Μ.Ο.} = \frac{\Sigma_{30}}{30} = \frac{8 \cdot 100 + (30-8)\cdot 70}{30} = \frac{30\cdot 70 + 8 \cdot 30}{30} = 70+8=78,$$

οπότε η **ελάχιστη δυνατή τιμή** του x είναι 30.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y = x^2 - (3\alpha - 5)x + 186,\ \alpha \in \mathbb{R}$. Να προσδιορίσετε τις τιμές του α για τις οποίες η παραβολή τέμνει τον άξονα των x σε δύο σημεία διαφορετικά μεταξύ τους με ακέραιες συντεταγμένες.

Λύση

Τα σημεία τομής της παραβολής $y = x^2 - (3\alpha - 5)x + 186,\ \alpha \in \mathbb{R}$ με τον άξονα των x είναι της μορφής $A_1(x_1, 0)$ και $A_2(x_2, 0)$, όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - (3\alpha - 5)x + 186 = 0,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Άρα έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3a - 5, \qquad (1)\\ x_1 x_2 &= 186 \qquad (2) \end{aligned}.$$

Επειδή πρέπει οι ρίζες x_1 και x_2 να είναι ακέραιοι αριθμοί, σύμφωνα με την υπόθεση διαφορετικοί μεταξύ τους, έστω $|x_1| < |x_2|$, από την εξίσωση (2), έχουμε ότι οι x_1, x_2 πρέπει να είναι ομόσημοι ακέραιοι με γινόμενο $186 = 2\cdot 3 \cdot 31$. Άρα έχουμε τα εξής δυνατά ζεύγη:

$$(x_1, x_2) \in \{(1,186),(2,93),(3,62),(6,31),(-1,-186),(-2,-93),(-3,-62),(-6,-31)\}$$

Από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι: $\alpha = \dfrac{x_1 + x_2 + 5}{3}$, οπότε οι δυνατές τιμές για την παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι οι εξής: $64, \dfrac{100}{3}, \dfrac{70}{3}, 14, -\dfrac{182}{3}, -30, -20, -\dfrac{32}{3}$.

Πρόβλημα 2

Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα :

$$\left\{\begin{aligned} x^4 + x^2y^2 + y^4 &= 91 \\ x^2 + xy + y^2 &= 13 \end{aligned}\right\}$$

Λύση (1ος τρόπος)

Προσθέτοντας και αφαιρώντας το x^2y^2 η πρώτη εξίσωση γίνεται:

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 = (x^2+y^2)^2 - x^2y^2 = (x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)$$

Επομένως, έχουμε $x^2 + y^2 - xy = \dfrac{91}{13} = 7$. Προσθέτοντας τώρα αυτή και τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος, βρίσκουμε ότι: $2(x^2+y^2) = 20 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 10$, οπότε

$xy=3$ από τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος. Έτσι καταλήγουμε στο ισοδύναμο σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{c} x^2+y^2=10 \\ xy=3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x^2+y^2=10 \\ 2xy=6 \end{array}\right\},$$

από το οποίο με πρόσθεση και αφαίρεση των δύο εξισώσεων κατά μέλη, λαμβάνουμε

$$\left\{\begin{array}{c} x^2+y^2+2xy=16 \\ x^2+y^2+2xy=4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} (x+y)^2=16 \\ (x-y)^2=4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y=\pm 4 \\ x-y=\pm 2 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y=4 \\ x-y=2 \end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c} x+y=-4 \\ x-y=2 \end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c} x+y=4 \\ x-y=-2 \end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c} x+y=-4 \\ x-y=-2 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow (x,y)=(3,1) \text{ ή } (x,y)=(-1,-3) \text{ ή } (x,y)=(1,3) \text{ ή } (x,y)=(-3,-1).$$

2^{ος} τρόπος

Έχουμε

$$\left\{\begin{array}{l} x^4+x^2y^2+y^4=91 \\ x^2+xy+y^2=13 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left(x^2+y^2\right)^2-(xy)^2=91 \\ x^2+xy+y^2=13 \end{array}\right\},$$

οπότε, αν θέσουμε $\varphi=x^2+y^2$ και $\omega=xy$, λαμβάνουμε το σύστημα

$$\left\{\begin{array}{c} \varphi^2-\omega^2=91 \\ \varphi+\omega=13 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} (\varphi+\omega)(\varphi-\omega)=91 \\ \varphi+\omega=13 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \varphi-\omega=7 \\ \varphi+\omega=13 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \varphi=10 \\ \omega=3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x^2+y^2=10 \\ xy=3 \end{array}\right\}.$$

Στη συνέχεια εργαζόμαστε, όπως στον πρώτο τρόπο.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB<A\Gamma<B\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$. Η διχοτόμος $B\Delta$ τέμνει τον κύκλο $C(O,R)$, στο σημείο Z. Έστω E τυχόν σημείο του τμήματος $\Delta\Gamma$. Η ευθεία BE τέμνει τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο H. Οι ευθείες $A\Gamma$ και ZH τέμνονται στο σημείο Θ. Επίσης, η ευθεία ZE τέμνει τον κύκλο στο σημείο K. Να αποδείξετε ότι τα τετράπλευρα $B\Delta H\Theta$, $B\Delta EK$ και $\Delta Z\Theta K$ είναι εγγράψιμα.

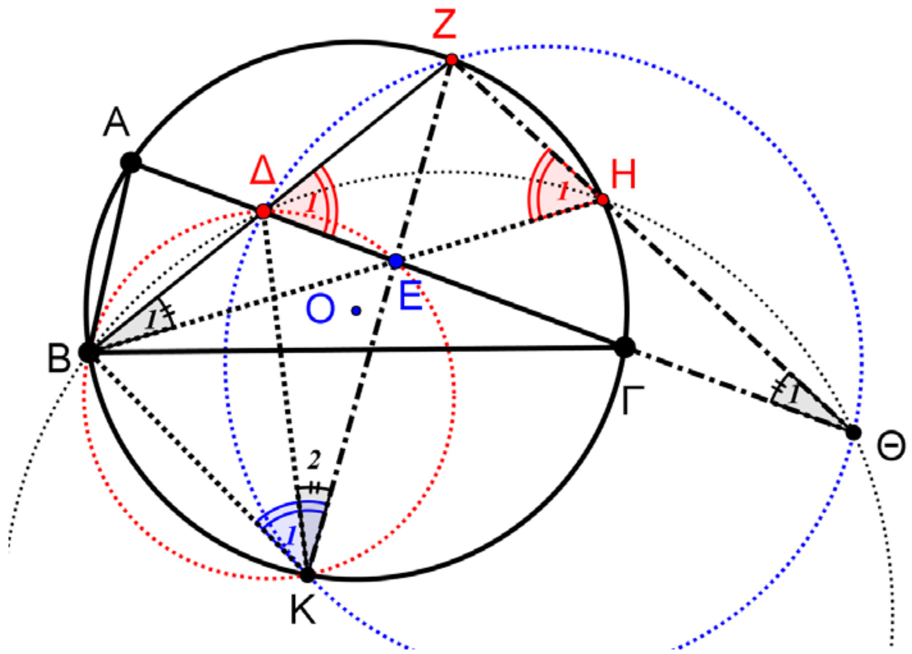
Λύση

Η γωνία $\hat{H}_1$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο $C(O,R)$ και βαίνει στο τόξο BZ. Άρα:

$$\hat{H}_1=\hat{\Gamma}+\frac{\hat{B}}{2}.$$

Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική του τριγώνου $A\Delta Z$. Άρα:

$$\hat{\Delta}_1=\Delta\hat{A}Z+A\hat{Z}B=\frac{\hat{B}}{2}+\hat{\Gamma}.$$



Σχήμα 6

Από την ισότητα των γωνιών $\hat{H}_1 = \hat{\Delta}_1$, προκύπτει η ισότητα των παραπληρωματικών τους γωνιών και από εκεί ότι **το τετράπλευρο** $B\Delta H\Theta$ **είναι εγγράψιμο.**

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $BKHZ$ έχουμε: $\hat{H}_1 = \hat{K}_1$, η οποία σε συνδυασμό με την ισότητα $\hat{H}_1 = \hat{\Delta}_1$, μας δίνει **την εγγραψιμότητα του τετραπλεύρου** $B\Delta EK$ **.**

Από το εγγράψιμο $B\Delta EK$ έχουμε: $\hat{K}_2 = \hat{B}_1$.Από το εγγράψιμο $B\Delta H\Theta$ έχουμε: $\hat{\Theta}_1 = \hat{B}_1$. Άρα είναι: $\hat{K}_2 = \hat{\Theta}_1$.

Επομένως και **το τετράπλευρο** $\Delta Z\Theta K$ **είναι εγγράψιμο.**

Πρόβλημα 4

Να βρείτε όλους τους φυσικούς αριθμούς n, που έχουν ακριβώς τέσσερις θετικούς διαιρέτες $d_1 < d_2 < d_3 < d_4$ και ικανοποιούν τη σχέση:

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 640.$$

Λύση

Για τους τέσσερις διαιρέτες ισχύουν οι σχέσεις

$$d_1 = 1,\ d_4 = n \ \text{ και } \ d_2 \cdot d_3 = n.$$

Επομένως, έχουμε

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 640 \Leftrightarrow 1 + d_2 + d_3 + d_2 d_3 = 640$$
$$\Leftrightarrow (1+d_2)(1+d_3) = 640 \Leftrightarrow (1+d_2)(1+d_3) = 2^7 \cdot 5$$

Αλλά $1 = d_1 < d_2 < d_3 < d_4 \Rightarrow 2 < 1 + d_2 < 1 + d_3$ και επειδή οι d_2 και d_3 είναι ακέραιοι αριθμοί, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $1 + d_2 = 4, 1 + d_3 = 160 \Leftrightarrow d_2 = 3, d_3 = 159 = 3 \cdot 53$, απορρίπτονται, αφού ο $n = 3 \cdot 159$ έχει και άλλους διαιρέτες.

- $1+d_2=5, 1+d_3=128 \Leftrightarrow d_2=4, d_3=127$, απορρίπτονται, αφού ο $n=4\cdot 127$ έχει και άλλους διαιρέτες.
- $1+d_2=8, 1+d_3=80 \Leftrightarrow d_2=7, d_3=79$, οπότε είναι $n=7\cdot 79=553$
- $1+d_2=10, 1+d_3=64 \Leftrightarrow d_2=9, d_3=63,$ απορρίπτονται, αφού ο $n=9\cdot 63$ έχει και άλλους διαιρέτες.
- $1+d_2=16, 1+d_3=40 \Leftrightarrow d_2=15, d_3=39,$ απορρίπτονται, αφού ο $n=15\cdot 39$ έχει και άλλους διαιρέτες.
- $1+d_2=20, 1+d_3=32 \Leftrightarrow d_2=19, d_3=31,$ οπότε είναι $n=19\cdot 31=589$

Τελικά, οι αριθμοί που ικανοποιούν τις αρχικές υποθέσεις είναι οι 553 και 589.