ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
84ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
4 Νοεμβρίου 2023

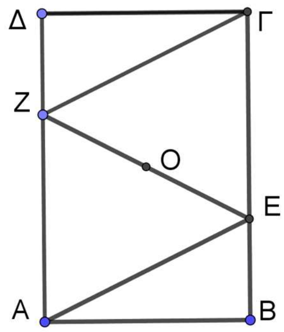
Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Να υπολογίσετε και να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$\mathrm{A}=\left(\frac{-(-5)^2+(-3)^2}{(-4)^2}\right)^{2023}+\frac{22}{23}\ , \qquad \mathrm{B}=-[(3-7)^2+(-2)^3-9]^2+\frac{23}{24}.$$

Πρόβλημα 2. Δίνεται ότι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών 18 και x είναι ίσος με 3, όπου x θετικός ακέραιος μικρότερος του 50. Να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του ελαχίστου κοινού πολλαπλασίου των αριθμών 18 και x.

Πρόβλημα 3. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ και ΓΖ είναι παράλληλα και το σημείο Ο είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΕΖ. Να αποδείξετε ότι:
(α) $\mathrm{AE}=\Gamma\mathrm{Z}$.
(β) $\mathrm{BE}=\Delta\mathrm{Z}$.
(γ) Τα σημεία Β, Ο και Δ βρίσκονται στην ίδια ευθεία και το Ο είναι το μέσο του τμήματος ΒΔ.
Σημείωση: *Στο φύλλο απαντήσεων να κάνετε το δικό σας σχήμα.*



Πρόβλημα 4. Η δασκάλα μιας τάξης 20 παιδιών θέλει να επιλέξει τυχαία κάποια από αυτά για να την εκπροσωπήσουν στη Βουλή. Τοποθετεί τα παιδιά σε έναν κύκλο και τους μοιράζει από ένα φάκελο που μέσα γράφει έναν ακέραιο αριθμό από το 1 έως το 20. Κάθε αριθμός εμφανίζεται μόνο μία φορά. Αφού ανοίξουν τους φακέλους, ένα παιδί επιλέγεται μόνο αν έχει δίπλα του (δεξιά και αριστερά του) ένα παιδί με μικρότερο αριθμό και ένα παιδί με μεγαλύτερο αριθμό. Τελικά επιλέχθηκαν 7 παιδιά. Είναι δυνατόν το άθροισμα των αριθμών που είχαν τα παιδιά που επιλέχθηκαν να είναι 113;

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες *Καλή επιτυχία*!
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
84ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
4 Νοεμβρίου 2023

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

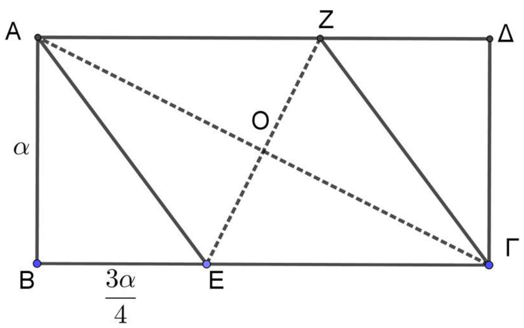
Πρόβλημα 1. Δίνεται η αριθμητική παράσταση

$$\mathrm{A} = \left[\frac{(-2)^{-10}}{(-8)^{-10}} + 3 \cdot \frac{32^6}{4^5}\right]^{100} : (12^2 - 4^2)^{300}$$

Να εκφράσετε την τιμή της παράστασης Α ως δύναμη με βάση το 2.

Πρόβλημα 2. Δίνεται ο εξαψήφιος θετικός ακέραιος $\mathrm{A} = \overline{2023xy}$, όπου x, y ψηφία του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης.
Να προσδιορίσετε τα ψηφία x, y έτσι ώστε ο αριθμός Α να διαιρείται με τον αριθμό 17.

Πρόβλημα 3. Δίνονται 7 θετικοί ακέραιοι αριθμοί για τους οποίους γνωρίζουμε ότι για οποιουσδήποτε 4 από αυτούς, το γινόμενό τους διαιρείται με το 10. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός από τους 7 δεδομένους που διαιρείται με το 10.



Πρόβλημα 4. Στο παραπάνω σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με $\mathrm{AB} = \alpha$, $\mathrm{B\Gamma} = 2\alpha$. Οι ευθείες ΑΕ και ΓΖ είναι παράλληλες και $\mathrm{BE} = \frac{3\alpha}{4}$. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\mathrm{AE} = \mathrm{AZ}$.

(β) Η διαγώνιος ΒΔ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ περνάει από το Ο που είναι το σημείο τομής των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΓ και ΖΕ.

(γ) $\mathrm{A\Gamma} = 2 \cdot \mathrm{EZ}$.

Σημείωση: *Στο φύλλο απαντήσεων να κάνετε το δικό σας σχήμα.*

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες *Καλή επιτυχία*!
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
84^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
4 Νοεμβρίου 2023

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Θεωρούμε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς a, b, c έτσι, ώστε οι αριθμοί $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$ και $\frac{c}{a}$ να είναι ακέραιοι. Να βρεθούν όλες οι δυνατές τιμές της παράστασης

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Πρόβλημα 2. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς x, y, με $y \neq -2$, ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:

$$x^2-4x+\frac{5}{y+2}=2 \quad \text{και} \quad 3(x-2)^2-\frac{4}{y+2}=-1.$$

Πρόβλημα 3. Να εξετάσετε αν υπάρχει θετικός ακέραιος n τέτοιος, ώστε ο αριθμός

$$\mathrm{A}=2023\cdot 10^n+1$$

να ισούται με τετράγωνο ακεραίου αριθμού.

Πρόβλημα 4. Σε ένα κύκλο $c(\mathrm{O},\mathrm{R})$ θεωρούμε τα σημεία Α, Β, Γ, και Δ τέτοια ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι ισοσκελές τραπέζιο με ΑΒ||ΔΓ. Έστω Ε το σημείο τομής της διχοτόμου της γωνίας $\widehat{\mathrm{A}}$ του τραπεζίου με τον κύκλο $c(\mathrm{O},\mathrm{R})$. Αν η παράλληλη από το Ε στην ΔΓ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο Ζ, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΟΖ είναι κάθετη στην ΕΓ.

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες *Καλή επιτυχία*!
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
84ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
4 Νοεμβρίου 2023

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Θεωρούμε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς a, b, c, d έτσι, ώστε οι αριθμοί $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{d}$ και $\frac{d}{a}$ να είναι ακέραιοι. Να βρεθούν όλες οι δυνατές τιμές της παράστασης

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right).$$

Πρόβλημα 2. Να εξετάσετε αν υπάρχει θετικός ακέραιος n τέτοιος, ώστε ο αριθμός

$$\mathrm{A} = 2023 \cdot 10^n + 6,$$

να ισούται με τετράγωνο ακεραίου αριθμού.

Πρόβλημα 3. Δίνονται τα τριώνυμα $P(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ και $Q(x) = x^2 + \gamma x + \delta$, με $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ακέραιους, ώστε να ισχύει $P(1) = Q(2022)$ και $P(2022) = Q(1)$.
Να αποδείξετε ότι το άθροισμα $\alpha + \gamma$ και η διαφορά $\beta - \delta$ είναι πολλαπλάσια του 2023.

Πρόβλημα 4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ και το σημείο τομής των διχοτόμων του Ι. Έστω ότι η ευθεία ΑΙ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ. Θεωρούμε σημείο Κ στην πλευρά ΑΒ τέτοιο ώστε ΒΚ = ΒΔ, και σημείο Λ στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε ΑΛ = ΑΚ. Αν Μ είναι το σημείο τομής του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΚΙΛ με την ΑΛ (διαφορετικό από το Λ), να αποδείξετε ότι η ευθεία ΜΙ είναι κάθετη στην ΒΓ.

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες *Καλή επιτυχία*!
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
84ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
4 Νοεμβρίου 2023

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Θεωρούμε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς a, b, c, d, έτσι ώστε οι αριθμοί $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{d}$ και $\frac{d}{a}$ να είναι ακέραιοι. Να βρεθούν όλες οι δυνατές τιμές της παράστασης

$$(a^3+b^3+c^3+d^3)\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}\right).$$

Πρόβλημα 2. Ένα πολυώνυμο είναι βαθμού 2024 και έχει ακριβώς 4 διακεκριμένες πραγματικές ρίζες. Ποιο είναι το μέγιστο πλήθος μηδενικών συντελεστών που μπορεί να έχει;

Πρόβλημα 3. Να εξετάσετε αν υπάρχει θετικός ακέραιος n τέτοιος, ώστε ο αριθμός

$$\mathrm{A} = 2023 \cdot 10^n + 5,$$

να ισούται με τετράγωνο ακεραίου αριθμού.

Πρόβλημα 4. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB} < \mathrm{B\Gamma} < \mathrm{A\Gamma}$ και $\widehat{\mathrm{A}} = 60°$. Αν Ι είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου ΑΒΓ, Ο είναι το περίκεντρό του, και Ε είναι το μέσο του τόξου ΑΒ του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ που δεν περιέχει το σημείο Γ, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΟΙ είναι κάθετη στη χορδή ΒΕ.

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες *Καλή επιτυχία*!
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες