ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ

10ος Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά

«Κ. ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ»

Σάββατο 20 Ιανουαρίου 2018

<u>Α΄ Γυμνασίου</u>

Θέμα 1^{ο}

α) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $A=\dfrac{3^2+4^2}{5}+\left[\left(3^2-2^3\right)^{2018}+3\cdot 6+1\right]$ **(2μ)**

β) Να βρεθούν όλοι οι τριψήφιοι $\overline{\alpha\beta\gamma}$ αριθμοί (α εκατοντάδες, β δεκάδες, γ μονάδες) έτσι ώστε το άθροισμα $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ να είναι διαιρέτης του αριθμού Α όπου $a\neq 0$. **(3μ)**

ΛΥΣΗ

α) $\mathrm{A}=\dfrac{3^2+2^4}{5}+\left(3^2-2^3\right)^{2018}+3\cdot 6+1$

$\mathrm{A}=\dfrac{9+16}{5}+\left(9-8\right)^{2018}+18+1$

$\mathrm{A}=\dfrac{25}{5}+1^{2018}+19$

$\mathrm{A}=5+1+19$

$\mathrm{A}=25$

β) Οι διαιρέτες του 25 είναι οι 1, 5, 25.

- Αν $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, τότε α=1 και β=γ=0 , δηλαδή ο 100 είναι ένας τέτοιος τριψήφιος αριθμός.
- Αν $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=5$, τότε α=2, β=1 και γ=0 ή α=2, β=0 και γ=1 ή α=1, β=2 και γ=0 ή α =1, β=0 και γ=2, δηλαδή οι 210, 201, 102, 120 είναι άλλοι τέσσερις τέτοιοι τριψήφιοι αριθμοί.
- Αν $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=25$, τότε οι α, β και γ είναι μικρότεροι ή ίσοι του 5.
  - αν α=5 τότε β=γ=0, δηλαδή ένας ζητούμενος τριψήφιος αριθμός είναι ο 500. Επομένως, εξαντλήσαμε την περίπτωση που κάποιο ψηφίο είναι ίσο με 5.
  - αν α=4, τότε $\beta^2+\gamma^2=9$. Μία περίπτωση είναι β=3 και γ=0 ή β=0 και γ=3. Αν β=2 τότε γ^2=5, άτοπο. Ομοίως, αν β=1. Άρα, άλλοι πιθανοί αριθμοί είναι οι 430, 403, 340, 304. Επομένως, εξαντλήσαμε την περίπτωση που κάποιο ψηφίο είναι ίσο με 4.
  - Αν α=3, τότε $\beta^2+\gamma^2=16$. Επειδή, οι β και γ είναι μικρότεροι ή ίσοι του 3, ομοίως με την προηγούμενη περίπτωση, καταλήγουμε γρήγορα σε άτοπο.

Τελικά οι τριψήφιοι αριθμοί είναι οι: 100, 102, 120, 201, 210, 304, 340, 403, 430, 500.

Θέμα 2ο

α) Μπορείτε να χωρίσετε τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 και 9 σε τρεις ομάδες των τριών αριθμών έτσι ώστε το άθροισμα των αριθμών στην κάθε ομάδα να είναι το ίδιο; Αν ναι να παρουσιάσετε μια τέτοια λύση, αν όχι να δικαιολογήσετε την απάντηση σας. **(1μ)**

β) Μπορείτε να κάνετε το ίδιο με το πρώτο ερώτημα για τους αριθμούς 1, 3, 5, 7, 9, 12, 13, 14 και 15. **(2μ)**

γ) Μπορείτε να κάνετε το ίδιο με το πρώτο ερώτημα για τους αριθμούς 101, 202, 303, 404, 505, 606, 708, 2017 και 2018. **(2μ)**

ΛΥΣΗ

α) Η απάντηση είναι θετική. Παράδειγμα : 9, 5, 1 / 8, 3, 4 / 7, 6, 2.

β) Η απάντηση είναι αρνητική. Το άθροισμα όλων των αριθμών είναι :

1+ 3+ 5 +7 + 9 + 12 + 13 +14 + 15 = 79. Επομένως το άθροισμα των αριθμών σε κάθε ομάδα πρέπει να είναι 79:3 = 26,333…, αδύνατο αφού πρέπει να είναι ακέραιος αριθμός.

γ) Η απάντηση είναι αρνητική. Το άθροισμα όλων των αριθμών είναι :

101+202+303+404+505+606+708+2017+2018=6864. Επομένως το άθροισμα των αριθμών σε κάθε ομάδα πρέπει να είναι 6864:3=2288. Στην ομάδα που θα μπει ο 2018 οι άλλοι δύο αριθμοί πρέπει να έχουν άθροισμα 2288 – 2018 = 270. Αλλά οι δύο μικρότεροι αριθμοί (101 και 202) έχουν άθροισμα 303. Άρα δεν μπορούμε να βάλουμε στην ομάδα του 2018 άλλους αριθμούς.

Θέμα 3ο

Από τους μαθητές ενός γυμνασίου το $\frac{1}{4}$ συμμετέχει στη θεατρική ομάδα του σχολείου , το $\frac{1}{5}$ στην περιβαλλοντική ομάδα , το $\frac{1}{3}$ στην ομάδα φωτογραφίας ενώ οι υπόλοιποι 60 μαθητές συμμετέχουν σε άλλες ομάδες του σχολείου. Οι μαθητές των τριών αυτών ομάδων συμμετέχουν μόνο σε μία από αυτές εκτός από 8 μαθητές που συμμετέχουν στη θεατρική και στην περιβαλλοντική ομάδα.

α) Να βρεθεί πόσοι είναι οι μαθητές του σχολείου. **(3μ)**

β) Αν το πλήθος των μαθητών είναι 240, να βρεθεί πόσοι μαθητές συμμετέχουν μόνο στη θεατρική ομάδα. **(2μ)**

ΛΥΣΗ

α) Στις 3 ομάδες του σχολείου παίρνουν μέρος τα $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{47}{60}$ των μαθητών του σχολείου. Σε αυτούς όμως 8 άτομα μετρήθηκαν 2 φορές. Επομένως, οι 60 – 8 = 52 μαθητές είναι τα 13/60 των μαθητών του σχολείου. Άρα όλοι οι μαθητές είναι 52*60/13 = 240.

β) Το πλήθος των μαθητών που συμμετέχουν μόνο στη θεατρική ομάδα είναι $240\cdot\frac{1}{4}-8=60-8=52$.

Θέμα 4ο

Σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και αυξάνουμε το πλάτος του κατά 20% και μειώνουμε το μήκος του κατά 10%. Έτσι, σχηματίζεται ένα νέο τετράπλευρο.

α) Να υπολογίσετε πόσο επί τοις εκατό αυξήθηκε ή μειώθηκε το εμβαδόν του σχήματος και να δικαιολογήσετε την απάντηση σας. **(2μ)**

β) Αν το νέο τετράπλευρο είναι τετράγωνο με εμβαδόν 144 τ. μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του αρχικού ορθογωνίου και να αποδείξετε ότι η περίμετρος αυξήθηκε λιγότερο από 3%. **(3μ)**

ΛΥΣΗ

Έστω χ και ψ το μήκος και το πλάτος του αρχικού ορθογωνίου και χ΄, ψ΄ οι διαστάσεις του τελικού τετραπλεύρου.

α) Είναι χ΄=0,9*χ και ψ΄=1,2*ψ.Το εμβαδόν του αρχικού ορθογωνίου είναι Ε = χ*ψ. Το εμβαδόν του τελικού ορθογωνίου είναι Ε΄=χ΄*ψ΄=1,08*χ*ψ= 1,08*Ε. Οπότε, το εμβαδόν του ορθογωνίου αυξήθηκε κατά 8%.

β) Η πλευρά του τετραγώνου είναι 12 μέτρα, αφού 12*12=144 τ. μέτρα. Άρα, χ΄ = ψ΄ = 12 μέτρα.

Έτσι $\chi=\frac{12}{0,9}=\frac{120}{9}=\frac{40}{3}$ και $\psi=\frac{12}{1,2}=10$. Η περίμετρος του αρχικού ορθογωνίου είναι $\Pi=2(\chi+\psi)=2\left(10+\frac{40}{3}\right)=\frac{140}{3}$ ενώ του τετραγώνου είναι $\Pi'=4*12=48=\frac{144}{3}$.Επομένως, η περίμετρος αυξήθηκε κατά 4/3 μέτρα και το ποσοστό αύξησης είναι $\frac{\frac{4}{3}}{\frac{140}{3}}=\frac{4}{140}=\frac{1}{35}=\frac{3}{105}<\frac{3}{100}=3\%$.