

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ

7ος Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά

«Κ. ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ»



Σάββατο 17 Ιανουαρίου 2015

Α' Γυμνασίου

ΘΕΜΑ 1^ο

α) Να γίνουν οι πράξεις:

$$A = \frac{\left(4\frac{1}{3} - 2\frac{1}{4}\right) \div 1\frac{3}{2}}{\left(2\frac{1}{4} - 1\right) \cdot \frac{3}{2}} + \frac{5}{9} + 2 \cdot 1007$$

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} A &= \frac{\left(4\frac{1}{3} - 2\frac{1}{4}\right) \div 1\frac{3}{2}}{\left(2\frac{1}{4} - 1\right) \cdot \frac{3}{2}} + \frac{5}{9} + 2 \cdot 1007 = \frac{\left(\frac{13}{3} - \frac{9}{4}\right) \div \frac{5}{2}}{\left(\frac{9}{4} - 1\right) \cdot \frac{3}{2}} + \frac{5}{9} + 2014 = \frac{\left(\frac{52}{12} - \frac{27}{12}\right) \div \frac{5}{2}}{\left(\frac{9}{4} - \frac{4}{4}\right) \cdot \frac{3}{2}} + \frac{5}{9} + 2014 = \\ &= \frac{\frac{25}{12} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2}} + \frac{5}{9} + 2014 = \frac{\frac{5}{15}}{\frac{15}{8}} + \frac{5}{9} = \frac{40}{90} + \frac{5}{9} + 2014 = \frac{4}{9} + \frac{5}{9} + 2014 = 1 + 2014 = 2015 \end{aligned}$$

β) Αν $A = 2015$, να λυθεί η εξίσωση $\frac{3x-3}{9} = \frac{A-2012}{3}$

ΛΥΣΗ

$$\frac{3x-3}{9} = \frac{A-2012}{3}$$

$$\frac{3x-3}{9} = \frac{A-2012}{3} \Leftrightarrow \frac{3x-3}{9} = \frac{2015-2012}{3} \Leftrightarrow \frac{3x-3}{9} = \frac{3}{3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{3x-3}{9} = 1 \Leftrightarrow 3x-3=9 \Leftrightarrow 3x=9+3 \Leftrightarrow 3x=12 \Leftrightarrow x=12 \div 3 \Leftrightarrow x=4$$

ΘΕΜΑ 2

Α) Κάθε σχήμα αντιπροσωπεύει και έναν αριθμό.

$$\square \times \square = \bigcirc$$

$$\bigcirc + 200 = 600$$

$$\bigcirc \div \triangle = 25$$

$$\square - \triangle = \text{πεντάγωνο}$$

Ποιος είναι ο αριθμός που αντιπροσωπεύει κάθε σχήμα;

ΛΥΣΗ

$$\bigcirc = 600 - 200 = 400$$

$$\square \times \square = 400 \text{ άρα } \square = 20$$

$$400 \div \triangle = 25 \text{ άρα } \triangle = 16$$

$$\text{πεντάγωνο} = 20 - 16 = 4$$

Β) Οι αριθμοί 2015 και 757 διαιρούμενοι με τον θετικό αριθμό x δίνουν και οι δύο υπόλοιπο 17.

Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του x ;

ΛΥΣΗ

Οι ταυτότητες των διαιρέσεων είναι:

$$x \cdot \pi_1 + 17 = 2015 \quad \text{άρα} \quad x \cdot \pi_1 = 1998$$

$$x \cdot \pi_2 + 17 = 757 \quad \text{άρα} \quad x \cdot \pi_2 = 740$$

Το x είναι κοινός διαιρέτης των 1998 και 740

$$\begin{array}{r|l} 1998 & 2 \\ 999 & 3 \\ 333 & 3 \\ 111 & 3 \\ 37 & 37 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 740 & 2 \\ 370 & 2 \\ 185 & 5 \\ 37 & 37 \end{array}$$

Επομένως $740 = 2^2 \cdot 5 \cdot 37$ και $1998 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37$

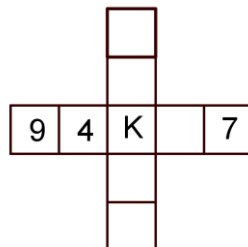
Οι κοινοί διαιρέτες των 1998 και 740 είναι οι: 1, 2, 37, 74

Επειδή το υπόλοιπο είναι μικρότερο από το διαιρέτη, πρέπει $x > 17$.

Επομένως $x = 37$ ή 74

ΘΕΜΑ 3

Τοποθετήστε τους αριθμούς από το 1 έως το 9 έναν σε κάθε τετράγωνο (κάθε αριθμός χρησιμοποιείται μόνο μία φορά) ώστε το άθροισμα της οριζόντιας στήλης να είναι ίσο με το άθροισμα της κατακόρυφης στήλης.

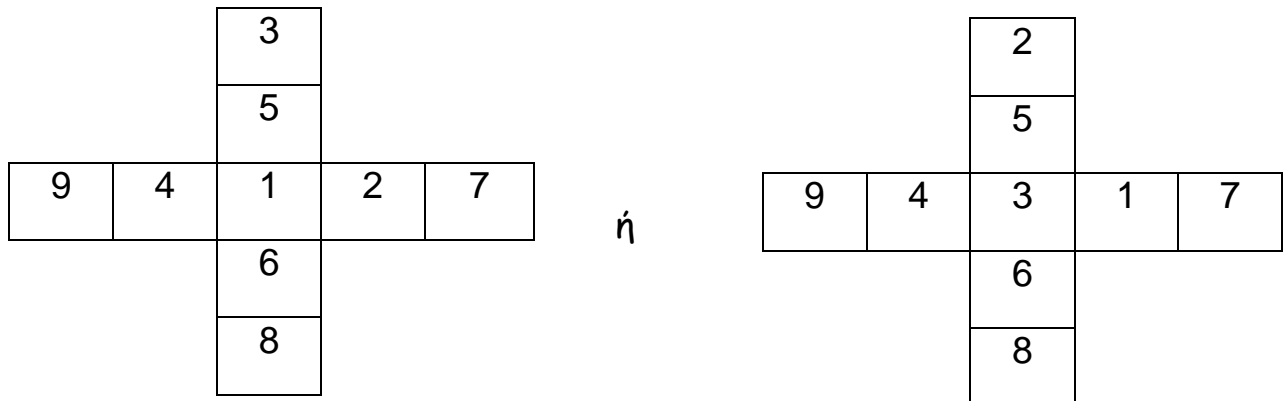


Ποιες τιμές παίρνει το K;

ΛΥΣΗ

1ος τρόπος

Οι μαθητές με δοκιμές μπορούν να βρουν ότι:



2ος τρόπος

Αν ονομάσουμε A_4 το άθροισμα των τεσσάρων ψηφίων εκτός του K τότε έχουμε $20 < A_4 \leq 22$ (το άθροισμα όλων των αριθμών από το 1 έως και το 9 είναι 45)

Άρα $A_4 = 21$ ή $A_4 = 22$

Επίσης το άθροισμα των ψηφίων της οριζόντιας στήλης είναι ίσο με το άθροισμα των ψηφίων της κατακόρυφης στήλης οπότε έχουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $A_4 = 21$ τότε $A_4 = 9 + 4 + 7 + 1 = 21 = 8 + 6 + 5 + 2$ οπότε $K=3$
- Αν $A_4 = 22$ τότε $A_4 = 9 + 4 + 7 + 2 = 22 = 8 + 6 + 5 + 3$ οπότε $K=1$

ΘΕΜΑ 4ο

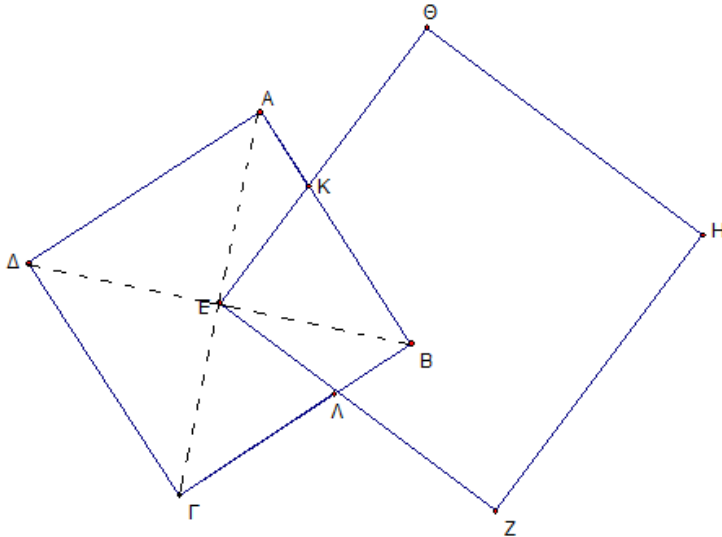
Το τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ έχει εμβαδόν 36 τετραγωνικά μέτρα και το $ΕΘΗΖ$ έχει πλευρά 7,5 μέτρα. Αν ξέρουμε ότι $ΚΒ = 2 ΑΚ$ και $ΓΛ = 2 ΛΒ$, να βρείτε:

α) Την πλευρά του τετραγώνου $ΑΒΓΔ$

β) Το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΘΗΖ

γ) Το εμβαδόν του τριγώνου ΚΒΛ

δ) Αν η κορυφή Ε είναι το κέντρο του τετραγώνου ΑΒΓΔ, να βρείτε το εμβαδόν του κοινού μέρους τους, δηλαδή το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΚΒΛΕ.



ΛΥΣΗ

α) Το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά $\sqrt{36} = 6$ μ.

β) $E_{EZHQ} = 7,5^2 = 56,25$ τ.μ.

γ) Αφού $KB=2AK$ είναι $KB = \frac{2}{3}AB$ και $GL=2LB$, άρα $BL = \frac{1}{3}BG$

Το τρίγωνο ΚΒΛ είναι ορθογώνιο, επομένως,

$$E_{KBL} = \frac{1}{2} \times KB \times BL = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times AB \times \frac{1}{3} \times BG = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times 6 \times \frac{1}{3} \times 6 = 4 \text{ τ.μ.}$$

$$\delta) E_{KBLE} = E_{EBL} + E_{EKB} = \frac{BL \times u}{2} + \frac{KB \times u}{2} = \frac{\frac{1}{3} \times 6 \times 3}{2} + \frac{\frac{2}{3} \times 6 \times 3}{2} = 3 + 6 = 9 \text{ τ.μ.}$$