ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ

4ος Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά. «Κ. ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ»

Σάββατο 21 Ιανουαρίου 2012

Α΄ Γυμνασίου

Θέμα 1ο

Να συμπληρώσετε με ψηφία τα δύο κενά τετράγωνα του αριθμού $2\square\square$ ώστε ο τριψήφιος που θα προκύψει να διαιρείται ακριβώς δια 2, 5 και 9.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Ο αριθμός που θα προκύψει πρέπει να είναι πολλαπλάσιο κοινό πολλαπλάσιο των 2,5 και 9. Δηλαδή κοινό πολλαπλάσιο του $\text{Ε.Κ.Π.}\,(2,5,9) = 90$. Επομένως ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 270.

β΄ τρόπος

Ο ζητούμενος αριθμός:

- διαιρείται δια 2 άρα είναι άρτιος (ζυγός) , επομένως το τελευταίο του ψηφίο είναι ένα από τα $0,2,4,6,8$.
- διαιρείται δια 5 άρα το τελευταίο του ψηφίο είναι ένα 0 ή 5.

  Άρα το τελευταίο του ψηφίο είναι το 0.
- διαιρείται δια 9 άρα το άθροισμα των ψηφίων του είναι πολλαπλάσιο του 9. Και επειδή το πρώτο ψηφίο είναι το 2, το τρίτο είναι το 0, υποχρεωτικά το δεύτερο είναι το 7 . $(2+7+0=9)$.

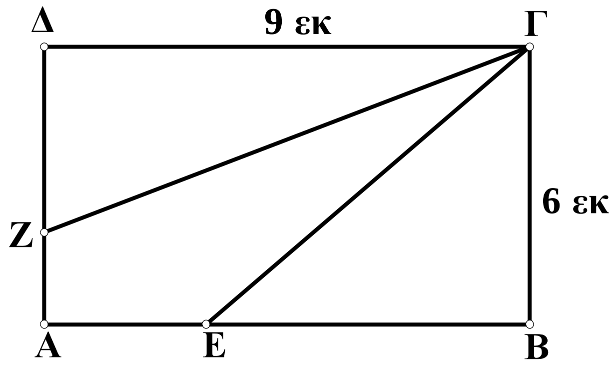
Επομένως ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 270.

<u>Θέμα 2ο</u>

Στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος, οι διαστάσεις είναι $AB = 9$ εκ. και $A\Delta = 6$ εκ. Είναι επίσης $BE = 6$ εκ.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΕ είναι ίσο με το $\frac{1}{3}$ του εμβαδού του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.

β) Αν για το σημείο Ζ της πλευράς ΑΔ το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΓΖΑΕ είναι ίσο με το $\frac{1}{3}$ του εμβαδού του ΑΒΓΔ, να βρεθεί το μήκος του τμήματος ΑΖ.



<u>Λύση</u>

α) Το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΕ είναι ίσο με $\frac{1}{2} \cdot B\Gamma \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18$ τετ.εκ. Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι $(AB) \cdot (A\Delta) = 9 \cdot 6 = 54$ τετ.εκ. . Άρα το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΕ είναι ίσο με το $\frac{1}{3}$ του εμβαδού του ορθογωνίου ΑΒΓΔ. $\left(18 = \frac{1}{3} \cdot 54\right)$

β) Έχουμε: $(B\Gamma E) = \frac{1}{3} \cdot (AB\Gamma\Delta)$ και $(\Gamma ZAE) = \frac{1}{3} \cdot (AB\Gamma\Delta)$ άρα και $(\Gamma\Delta Z) = \frac{1}{3} \cdot (AB\Gamma\Delta)$. Δηλαδή $(\Gamma\Delta Z) = 18$ τετ. εκ.

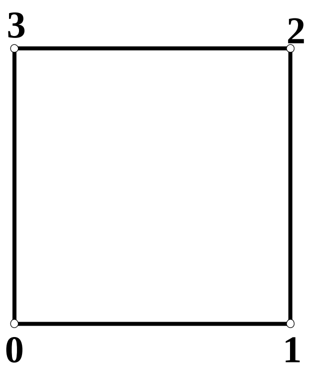
Είναι: $\frac{1}{2} \cdot (\Gamma\Delta) \cdot (\Delta Z) = 18$ δηλαδή $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot (\Delta Z) = 18$ Επομένως $(\Delta Z) = 4$ εκ. και $(AZ) = (A\Delta) - (\Delta Z) = 6 - 4 = 2$ εκ.

Θέμα $3^{ο}$

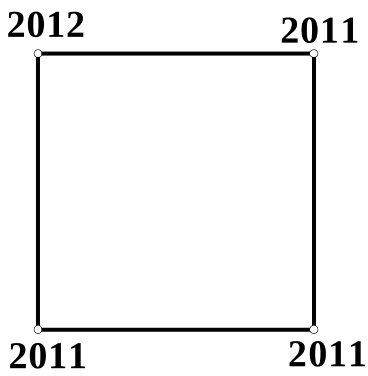
Στις κορυφές του τετραγώνου του σχήματος 1 είναι τοποθετημένοι οι αριθμοί 0, 1, 2, 3. Εκλέγουμε 3 από τις 4 κορυφές και προσθέτουμε σε κάθε μια το 1 (αν π.χ εκλέξουμε τις κορυφές με τους αριθμούς 0, 1 και 3 οι κορυφές θα γίνουν 1 , 2 και 4 αντίστοιχα).
Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται όσες φορές χρειαστεί.

α) Τι παρατηρείτε για το άθροισμα των αριθμών στις 4 κορυφές μετά από κάθε διαδικασία;

β) Να αποδείξετε ότι δεν μπορούμε να φτάσουμε στο αποτέλεσμα του σχήματος 2 οσεσδήποτε φορές και αν εκτελέσουμε την παραπάνω διαδικασία.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Λύση

α) Αρχικά το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται στις τέσσερις κορυφές είναι: $0 + 1 + 2 + 3 = 6$. Επειδή κάθε φορά προσθέτουμε τον αριθμό 1 σε κάθε μια από τις **τρεις** κορυφές που επιλέξαμε, το υπάρχον άθροισμα αυξάνεται κατά 3 και έτσι το άθροισμα των τεσσάρων κορυφών είναι πολλαπλάσιο του 3, αφού και το 6 (αρχικό άθροισμα) είναι πολλαπλάσιο του 3.

α) Δεν μπορούμε να φτάσουμε στο αποτέλεσμα του σχήματος 2 οσεσδήποτε φορές και αν εκτελέσουμε την παραπάνω διαδικασία, διότι το άθροισμα των τεσσάρων αριθμών που βρίσκονται στις κορυφές του είναι: $2011 + 2011 + 2011 + 2012 = 8045$ που **δεν** είναι πολλαπλάσιο του 3, διότι: $8 + 0 + 4 + 5 = 17$.

<u>**Θέμα 4^{o}**</u>

Αν τοποθετήσουμε το ψηφίο 7 στο τέλος ενός διψήφιου αριθμού, ο τριψήφιος που προκύπτει είναι κατά 529 μεγαλύτερος του αρχικού διψήφιου. Να βρεθεί ο διψήφιος αριθμός.

<u>Λύση</u>

Έστω ότι ο διψήφιος αριθμός που έχουμε αρχικά έχει τη μορφή $\overline{\alpha\beta}$. Δηλαδή το ψηφίο των δεκάδων είναι α και το μονάδων το β . Όταν τοποθετήσουμε το ψηφίο 7 στο τέλος του αριθμού αυτού ο τριψήφιος που προκύπτει έχει τη μορφή $\overline{\alpha\beta 7}$. Με ψηφίο μονάδων το των **7** , δεκάδων το β και εκατοντάδων το α . και ισχύει: $\overline{\alpha\beta 7} = 529 + \overline{\alpha\beta}$. Δηλαδή :

$$
\begin{array}{r} 5\ 2\ 9 \\ +\quad \alpha\ \beta \\ \hline \alpha\ \beta\ 7 \end{array}
\quad ή \quad
\begin{array}{r} 5\ 2\ 9 \\ +\quad \alpha\ 8 \\ \hline \alpha\ 8\ 7 \end{array}
\quad ή \quad
\begin{array}{r} 5\ 2\ 9 \\ +\quad 5\ 8 \\ \hline 5\ 8\ 7 \end{array}
$$

Από την παραπάνω διαδικασία προκύπτει ότι ο ζητούμενος αριθμός είναι ο **58.**