ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ

2^{ος} Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά.
«Κ. ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ»

Σάββατο 23 Ιανουαρίου 2010

Α΄ Γυμνασίου

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Με τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5 σχηματίζουμε εξαψήφιους αριθμούς χρησιμοποιώντας όλα τα ψηφία μία φορά το καθένα, π.χ 235014, 540213 κ.λ.π (το 0 δεν μπορεί να είναι 1^{ο} ψηφίο).

α) Δικαιολογήστε γιατί όλοι οι εξαψήφιοι αυτοί αριθμοί διαιρούνται δια του 3, αλλά δε διαιρούνται δια 9

β) Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός που μπορούμε να σχηματίσουμε ώστε να διαιρείται ακριβώς και δια 4 και δια 5;

Απάντηση

α) Επειδή χρησιμοποιούμε, όλα τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5, μια φορά το καθένα, το άθροισμα των ψηφίων του εξαψήφιου αριθμού που θα προκύψει είναι: 0+1+2+3+4+5=15. Σύμφωνα με τα κριτήρια διαιρετότητας, ο εξαψήφιος αυτός αριθμός, διαιρείται με το 3 αλλά όχι με το 9. (Ένας Φυσικός αριθμός διαιρείται με το 3 ή το 9 όταν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3 ή το 9 αντίστοιχα. Ο αριθμός 15 διαιρείται με το 3 αλλά όχι με το 9.)

β) Γνωρίζουμε ότι ένας Φυσικός αριθμός διαιρείται με το 4 όταν το τελευταίο διψήφιο τμήμα του διαιρούνται με το 4. Ενώ ένας Φυσικός αριθμός διαιρείται με το 5 όταν το ψηφίο των μονάδων του είναι 0 ή 5. Επομένως το τελευταίο διψήφιο τμήμα του αριθμού μας, πρέπει να είναι 20 ή 40. Επειδή ζητάμε τον <u>μεγαλύτερο</u> εξαψήφιο αριθμό, αυτός θα είναι ο 543120.

<u>ΘΕΜΑ 2^{ο}</u>

Ο Κώστας είχε μερικά χρυσά νομίσματα και αποφάσισε μια Κυριακή να τα ξοδέψει με τον εξής τρόπο:

Κάθε Δευτέρα θα τα διπλασίαζε και κάθε Παρασκευή θα ξόδευε 32. Αν το Σάββατο της 4ης εβδομάδας δεν του είχε απομείνει κανένα νόμισμα, πόσα νομίσματα είχε στην αρχή ;

<u>Απάντηση</u>

Ξεκινώντας χρονικά από τέλος έχουμε:

Σάββατο 4^{ης} εβδομάδας: 0 νομίσματα

Παρασκευή 4^{ης} εβδομάδας: είχε 32 νομίσματα , ξόδεψε 32 νομίσματα και έμειναν 0

Δευτέρα 4^{ης} εβδομάδας: είχε τα μισά της Παρασκευής. Δηλαδή 32:2=16, τα οποία διπλασίασε και έτσι έγιναν 32 νομίσματα.

Παρασκευή 3^{ης} εβδομάδας: είχε 16+32=48 νομίσματα , ξόδεψε 32 νομίσματα και έμειναν 16

Σκεπτόμενοι με αυτόν τον τρόπο βρίσκουμε ότι την

Δευτέρα 3^{ης} εβδομάδας: είχε 48:2=24 νομίσματα, τα διπλασίασε και έγιναν 48

Παρασκευή 2^{ης} εβδομάδας: είχε 24+32=56 νομίσματα , ξόδεψε 32 νομίσματα και έμειναν 24

Δευτέρα 2^{ης} εβδομάδας: είχε 56:2=28 νομίσματα, τα διπλασίασε και έγιναν 56

Παρασκευή 1^{ης} εβδομάδας: 28+32=60 είχε 60 νομίσματα , ξόδεψε 32 νομίσματα και έμειναν 28

Δευτέρα 1^{ης} εβδομάδας: είχε 60:2=30 νομίσματα, τα διπλασίασε και έγιναν 60

<u>ΘΕΜΑ 3^{ο}</u>

Θεωρούμε όλους τους περιττούς αριθμούς από το 1 ως το 2009, δηλαδή τους αριθμούς 1, 3, 5, 7, …, 2007, 2009. Το πλήθος των αριθμών αυτών το ονομάζουμε Α. Θεωρούμε επίσης όλους τους άρτιους αριθμούς από το 2 ως το 2010, δηλαδή τους αριθμούς 2, 4, 6, 8, …, 2008, 2010. Το πλήθος των αριθμών αυτών το ονομάζουμε Β.

α) Να δικαιολογήσετε ότι Α = Β

β) Να βρείτε το πλήθος των αριθμών κάθε ομάδας. Είναι ο αριθμός αυτός άρτιος ή περιττός;

γ) Να βρείτε τη θέση που κατέχει ο μεσαίος αριθμός σε κάθε ομάδα; (δηλαδή 1ος, 2ος, 3ος, …)

δ) Να βρείτε τον μεσαίο αριθμό της δεύτερης ομάδας 2, 4, 6, 8,…, 2008, 2010

ε) Να βρείτε τον μεσαίο αριθμό της πρώτης ομάδας 1, 3, 5, 7, …, 2007, 2009

Απάντηση

α) Θεωρούμε και τις δυο ομάδες μαζί από το 1 έως το 2010. Το συνολικό πλήθος των αριθμών αυτών προφανώς είναι 2010 (άρτιος αριθμός). Χωρίζοντας τους αριθμούς αυτούς στις δυο ομάδες των άρτιων και των περιττών, προκύπτουν οι δυο ισοπληθείς ομάδες Α και Β. Άρα είναι Α=Β.

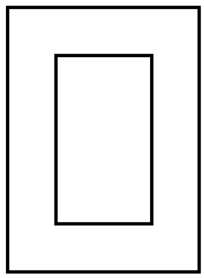
β) Επειδή είναι Α=Β και Α+Β=2010, άρα Α=Β=1005. Ο αριθμός αυτός είναι περιττός.

γ) Αφού η κάθε ομάδα 1005 αριθμούς, ο μεσαίος κατέχει την 503η θέση.

δ) Ο μεσαίος αριθμός της 2ης ομάδας είναι ο (2+2010):2=2012:2=1006

ε) Ο μεσαίος αριθμός της 1ης ομάδας είναι ο (1+2009):2=2010:2=1005

ΘΕΜΑ 4ο



Η μεγαλύτερη πλευρά του εξωτερικού ορθογωνίου του διπλανού σχήματος μειώθηκε κατά 20% ενώ η μικρότερη πλευρά του μειώθηκε κατά 30% δημιουργήθηκε έτσι το εσωτερικό ορθογώνιο.

Αν το εμβαδόν του εσωτερικού ορθογωνίου είναι 112 τετραγωνικά εκατοστά

α) να βρεθεί το εμβαδόν του εξωτερικού ορθογωνίου.

β) αν οι πλευρές των ορθογωνίων είναι ακέραιοι αριθμοί και η περίμετρος του εσωτερικού ορθογωνίου είναι 46 εκατοστά να βρεθούν οι διαστάσεις των δύο ορθογωνίων

Απάντηση

α) Η μεγαλύτερη πλευρά του εξωτερικού ορθογωνίου, μειώθηκε κατά 20% . Επομένως η μεγαλύτερη πλευρά του εσωτερικού ορθογωνίου είναι το 80% της αντίστοιχης πλευράς του εξωτερικού ορθογωνίου. Δηλαδή είναι ίση με τα $\frac{80}{100} = \frac{8}{10}$ αυτής. Όμοια βρίσκουμε ότι η μικρότερη πλευρά του εσωτερικού ορθογωνίου είναι ίση με τα $\frac{7}{10}$ της αντίστοιχης πλευράς του εξωτερικού ορθογωνίου.

Επομένως το εμβαδόν του εσωτερικού ορθογωνίου είναι ίσο με τα $\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{10}=\frac{56}{100}$ του εμβαδού του εξωτερικού ορθογωνίου.

Δηλαδή τα $\frac{56}{100}$ είναι 112 τετραγωνικά εκατοστά.

Το $\frac{1}{100}$ είναι 112:56=2 τετραγωνικά εκατοστά.

Τα $\frac{100}{100}$ είναι 2·100=200 τετραγωνικά εκατοστά.

Άρα το εμβαδόν του εξωτερικού ορθογωνίου είναι 200 τετραγωνικά εκατοστά.

β) Για το εσωτερικό ορθογώνιο γνωρίζουμε ότι έχει εμβαδόν 112 τετραγωνικά εκατοστά και περίμετρο 46 εκατοστά. Δηλαδή οι πλευρές του έχουν γινόμενο 112 και άθροισμα 46:2=23 . Ψάχνουμε επομένως δυο ακεραίους θετικούς αριθμούς που να έχουν γινόμενο 112 και άθροισμα 23. Έχουμε:

i. 112·1=112 και 112+1=113
ii. 56·2=112 και 56+2=58
iii. 28·4=112 και 28+4=32
iv. 16·7=112 και 16+7=23 √
v. 14·8=112 και 14+8=22

Συνεπώς οι μοναδικοί θετικοί ακέραιοι αριθμοί που έχουν γινόμενο 112 και άθροισμα 23 είναι οι : 16 και 7, που είναι και οι διαστάσεις του εσωτερικού ορθογωνίου.

Για το εξωτερικό ορθογώνιο έχουμε ότι :

Τα $\frac{8}{10}$ της μεγαλύτερης πλευράς του είναι 16 εκατοστά.

Το $\frac{1}{10}$ της μεγαλύτερης πλευράς του είναι $16:8=2$ εκατοστά.

Τα $\frac{10}{10}$ της μεγαλύτερης πλευράς του είναι $2\cdot 10=20$ εκατοστά.

Άρα η μεγαλύτερη πλευρά του εξωτερικού ορθογωνίου είναι 20 εκατοστά. Και αφού το εμβαδόν είναι 200 τ.ε. η μικρή πλευρά του είναι 10 εκατοστά.

<u>Σημείωση</u> Επειδή ίσως κάποιοι μαθητές της Α΄ Γυμνασίου δεν είναι ακόμα ιδιαίτερα εξοικειωμένοι με την έννοια της “ μεταβλητής ” απεφεύχθη η χρήση της στην λύση των ασκήσεων, αν και πιστεύουμε ότι θα ήταν χρήσιμη ειδικότερα στο 2^{o} και 4^{o} θέμα.