ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
79ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
19 Ιανουαρίου 2019

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.
Να βρείτε την τιμή της παράστασης**:**

$$\mathrm{A}=\left(\frac{3\beta^2+\alpha^2}{\beta^2}-10\right)\cdot\left(\frac{\alpha^2-3\beta^2}{\alpha^2}+\frac{13}{3}\right),$$

αν δίνεται ότι: $\dfrac{\alpha}{\beta}=3$.

Λύση
1ος Τρόπος

Επειδή $\dfrac{\alpha}{\beta}=3$, συμπεραίνουμε ότι $\alpha=3\beta$. Επομένως έχουμε:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{3\beta^2+\alpha^2}{\beta^2}-10\right)\cdot\left(\frac{\alpha^2-3\beta^2}{\alpha^2}+\frac{13}{3}\right)=\left(\frac{3\beta^2+9\beta^2}{\beta^2}-10\right)\cdot\left(\frac{9\beta^2-3\beta^2}{9\beta^2}+\frac{13}{3}\right)$$

$$=\left(\frac{12\beta^2}{\beta^2}-10\right)\cdot\left(\frac{6\beta^2}{9\beta^2}+\frac{13}{3}\right)=(12-10)\left(\frac{2}{3}+\frac{13}{3}\right)=2\cdot\frac{15}{3}=10.$$

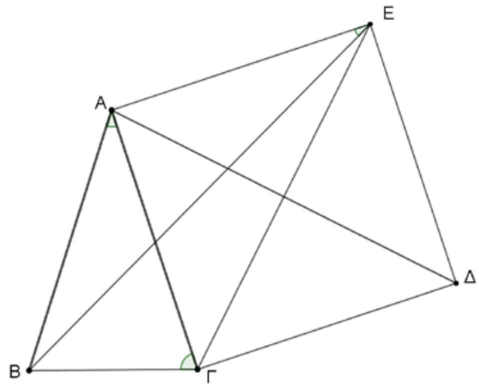
2ος Τρόπος

Επειδή $\dfrac{\alpha}{\beta}=3$, συμπεραίνουμε ότι $\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{1}{3}$. Επομένως έχουμε:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{3\beta^2+\alpha^2}{\beta^2}-10\right)\cdot\left(\frac{\alpha^2-3\beta^2}{\alpha^2}+\frac{13}{3}\right)=\left(3+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-10\right)\cdot\left(1-3\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2+\frac{13}{3}\right)$$

$$=\left(3+3^2-10\right)\cdot\left(1-3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{13}{3}\right)=(3+9-10)\cdot\left(1-\frac{3}{9}+\frac{13}{3}\right)=2\cdot(+5)=10.$$

Πρόβλημα 2



Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$ και $\hat{\Gamma} = 2\cdot\hat{A}$. Το τετράπλευρο ΑΓΔΕ είναι τετράγωνο.

(α) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $A\hat{E}B$.

(β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες $B\hat{A}\Delta$ και $B\hat{E}\Gamma$.

Σημείωση: Να κάνετε το δικό σας σχήμα στο φύλλο με τις απαντήσεις σας.

Λύση

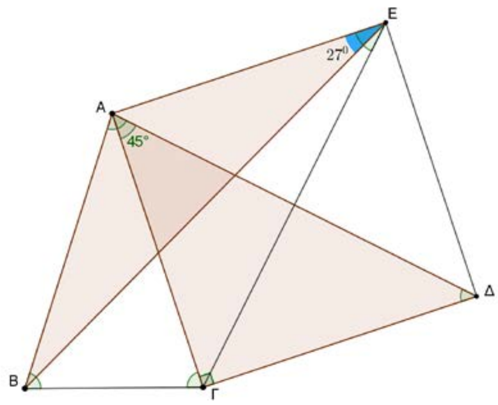
(α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$ έπεται ότι $\hat{\Gamma} = \hat{B} = 2\cdot\hat{A}$, οπότε από τη σχέση $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma} = 180^\circ$ έπεται ότι:

$$\hat{A}+2\hat{A}+2\hat{A} = 180^\circ \Rightarrow 5\hat{A} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 36^\circ.$$

Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές, αφού $AB = A\Gamma = AE$ και ισχύει ότι

$$B\hat{A}E = B\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}E = 36^\circ + 90^\circ = 126^\circ,$$

οπότε θα είναι $A\hat{E}B = \dfrac{180^\circ - B\hat{A}E}{2} = \dfrac{180^\circ - 126^\circ}{2} = 27^\circ$.



Σχήμα 1

(β) Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με ορθή γωνία $A\hat{\Gamma}\Delta = 90^\circ$, οπότε οι οξείες γωνίες του θα είναι 45° η καθεμία, δηλαδή $\Gamma\hat{A}\Delta = 45^\circ$. Επομένως είναι

$$B\hat{A}\Delta = B\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}\Delta = 36^\circ + 45^\circ = 81^\circ.$$

Ομοίως, από το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΕ με $\Gamma\hat{A}E = 90^\circ$ προκύπτει ότι: $A\hat{E}\Gamma = 45^\circ$, οπότε $B\hat{E}\Gamma = A\hat{E}\Gamma - A\hat{E}B = 45^\circ - 27^\circ = 18^\circ$.

Πρόβλημα 3

Για τη φωταγώγηση μιας πλατείας, σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τοποθετήθηκαν περιμετρικά 182 κολώνες φωτισμού. Τέσσερις από αυτές τοποθετήθηκαν στις γωνίες τις πλατείας. Στη συνέχεια τοποθετήθηκαν και οι υπόλοιπες 178 στην περίμετρο της πλατείας έτσι ώστε κάθε δύο διαδοχικές κολώνες απέχουν τέσσερα μέτρα. Επίσης διαπιστώθηκε ότι η μεγαλύτερη πλευρά της πλατείας είχε διπλάσιες κολώνες από τη μικρή πλευρά, όπου σε κάθε πλευρά μετράμε και τις κολώνες στις γωνίες. Να βρεθούν τα μήκη των πλευρών της πλατείας. **Σημείωση**: *Θεωρείστε τις κολώνες πάνω στις πλευρές της πλατείας ως σημεία.*

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι η μικρή πλευρά του ορθογωνίου είναι α μέτρα και η μεγάλη β μέτρα.

Τότε αφού κάθε δύο κολώνες απέχουν 4 μέτρα, η μικρή πλευρά θα έχει $\frac{\alpha}{4}+1$ κολώνες, συμπεριλαμβανομένων των γωνιών.

Ομοίως η μεγάλη πλευρά θα έχει $\frac{\beta}{4}+1$ κολώνες, συμπεριλαμβανομένων και των γωνιών, οπότε, αφού η μεγάλη πλευρά έχει διπλάσιες κολώνες από τη μικρή, θα έχουμε ότι

$$\frac{\beta}{4}+1=2\left(\frac{\alpha}{4}+1\right) \Rightarrow \beta=2\alpha+4.$$

Όμως συνολικά οι κολώνες είναι 182 και απέχουν τέσσερα μέτρα μεταξύ τους, οπότε η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $182\cdot 4=728$, δηλαδή $2\alpha+2\beta=728 \Rightarrow a+\beta=364$.

Επομένως, με αντικατάσταση της τιμής του β, έχουμε:

$$\alpha+2\alpha+b=364 \Rightarrow 3\alpha+4=364 \Rightarrow \alpha=120. \text{ και } \beta=244.$$

Πρόβλημα 4

(α) Να προσδιορίσετε το μικρότερο δυνατό θετικό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 12600.

(β) Να προσδιορίσετε το μικρότερο δυνατό εξαψήφιο θετικό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 12600.

Λύση

(α) Για να διαπιστώσουμε ποια ψηφία πρέπει να χρησιμοποιήσουμε αναλύουμε τον ακέραιο 12600 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Έχουμε: $12600=2^3\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7$, οπότε πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κατάλληλα όλους τους ακέραιους: 2, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 7, χωρίς να αποκλείεται το ψηφίο 1, αφού δεν επηρεάζει το γινόμενο των ψηφίων.

Προφανώς ο οκταψήφιος ακέραιος 22233557 έχει γινόμενο ψηφίων 126000. Επειδή ζητάμε το μικρότερο δυνατό ακέραιο με την ιδιότητα αυτή, θα εξετάσουμε τη δυνατότητα να βρούμε τρόπους μείωσης του αριθμού των ψηφίων που θα χρησιμοποιήσουμε. Αυτό μπορεί να γίνει, αν χρησιμοποιήσουμε ψηφία που προέρχονται από γινόμενα των παραπάνω αριθμών και ειδικότερα από γινόμενα των πέντε πρώτων στη σειρά ακέραιων. Αυτά είναι το $8=2\cdot 2\cdot 2$ και το $9=3\cdot 3$ που είναι και ο ελάχιστος δυνατός αριθμός τέτοιων ψηφίων. Έτσι λαμβάνουμε τον πενταψήφιο ακέραιο **Α = 55789** ως τον μικρότερο δυνατό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο 12600. Άλλη δυνατότητα είναι να πάρουμε τρία ψηφία $2,\ 4=2\cdot 2,\ 9=3\cdot 3$ ή $2,\ 6=2\cdot 3,\ 6=2\cdot 3$. Τότε όμως προκύπτει εξαψήφιος ακέραιος που είναι μεγαλύτερος από τον πενταψήφιο 55789.

(β) Σκεπτόμενοι ομοίως με το ερώτημα (α), για την εύρεση εξαψήφιου ακέραιου έχουμε τις δυνατότητες των ακέραιων 245599 ή 255669. Όμως υπάρχει και η δυνατότητα χρησιμοποίησης του ψηφίου 1 στην αρχή του ακέραιου 55789, οπότε προκύπτει ο ακέραιος **155789** που είναι μικρότερος από τους δύο προηγούμενους.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.
Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma+\alpha+\beta-\gamma,$$

αν δίνεται ότι $\alpha=\left(-\frac{1}{2}\right)^3$, $\beta=(-2)^{-2}$, $\gamma=-\frac{1}{2^3}$.

Λύση

Έχουμε ότι: $\alpha=\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{1}{8}$, $\beta=(-2)^{-2}=\frac{1}{(-2)^2}=\frac{1}{4}$, $\gamma=-\frac{1}{2^3}=-\frac{1}{8}$,

οπότε θα είναι

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma+\alpha+\beta-\gamma\\&=\left(-\frac{1}{8}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(-\frac{1}{8}\right)^3-3\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)+\left(-\frac{1}{8}\right)+\left(+\frac{1}{4}\right)-\left(-\frac{1}{8}\right)\\&=-\frac{1}{8^3}+\frac{1}{4^3}-\frac{1}{8^3}-\frac{3}{4\cdot 8^2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=-\frac{1}{\left(2^3\right)^3}+\frac{1}{\left(2^2\right)^3}-\frac{1}{\left(2^2\right)^3}-\frac{3}{2^2\cdot\left(2^3\right)^2}+\frac{1}{4}\\&=-\frac{1}{2^9}+\frac{1}{2^6}-\frac{1}{2^9}-\frac{3}{2^2\cdot 2^6}+\frac{1}{4}=-\frac{2}{2^9}+\frac{1}{2^6}-\frac{3}{2^8}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{2^8}+\frac{1}{2^6}-\frac{3}{2^8}+\frac{1}{4}\\&=\frac{-1+4-3}{2^8}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2
(α) Να προσδιορίσετε το μικρότερο δυνατό θετικό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 63000.
(β) Να προσδιορίσετε το μικρότερο δυνατό επταψήφιο θετικό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 63000.
(γ) Μπορούμε να βρούμε το μεγαλύτερο δυνατό θετικό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 63000;

Λύση
(α) Για να διαπιστώσουμε ποια ψηφία πρέπει να χρησιμοποιήσουμε αναλύουμε τον ακέραιο 63000 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Έχουμε: $63000=2^3\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7$, οπότε πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κατάλληλα όλους τους ακέραιους: 2, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 5, 7, χωρίς να αποκλείεται το ψηφίο 1, αφού δεν επηρεάζει το γινόμενο των ψηφίων.
Προφανώς ο ακέραιος 222335557 έχει γινόμενο ψηφίων 630000. Επειδή ζητάμε το μικρότερο δυνατό ακέραιο με την ιδιότητα αυτή, θα πρέπει να βρούμε τρόπους μείωσης του αριθμού των ψηφίων που θα χρησιμοποιήσουμε. Αυτό μπορεί να γίνει, αν χρησιμοποιήσουμε ψηφία που προέρχονται από γινόμενα των παραπάνω αριθμών και ειδικότερα από γινόμενα των πέντε πρώτων στη σειρά ακέραιων. Αυτά είναι το $8=2\cdot 2\cdot 2$ και το $9=3\cdot 3$ που είναι και ο ελάχιστος δυνατός αριθμός τέτοιων ψηφίων. Άλλη δυνατότητα είναι να πάρουμε τρία ψηφία $2,\ 4=2\cdot 2,\ 9=3\cdot 3$ ή $2,\ 6=2\cdot 3,\ 6=2\cdot 3$. Έτσι

λαμβάνουμε τον πενταψήφιο ακέραιο $\mathbf{A = 555789}$ ως τον μικρότερο δυνατό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο 63000.

(β) Σκεπτόμενοι ομοίως με το ερώτημα (α), για την εύρεση εξαψήφιου ακέραιου έχουμε τις δυνατότητες των ακέραιων 2455599 ή 2555669. Όμως υπάρχει και η δυνατότητα χρησιμοποίησης του ψηφίου 1 στην αρχή του ακέραιου 555789, οπότε προκύπτει ο ακέραιος $\mathbf{1555789}$ που είναι μικρότερος από τους δύο προηγούμενους.

(γ) Αν υποθέσουμε ότι βρήκαμε το μεγαλύτερο δυνατό ακέραιο Α του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 63000, τότε διαπιστώνουμε ότι υπάρχει ακέραιος μεγαλύτερος από τον Α που ικανοποιεί την ίδια ιδιότητα. Αυτός προκύπτει από τον Α με τοποθέτηση στο τέλος του ενός επιπλέον ψηφίου ίσου με το 1. Αυτό είναι άτοπο, από την υπόθεση για τον ακέραιο Α.

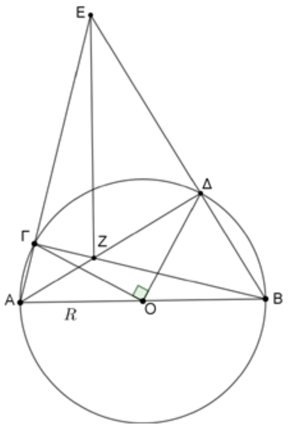
Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ο κύκλος διαμέτρου $\mathrm{AB} = 2R$ και η γωνία $\Gamma\hat{\mathrm{O}}\Delta = 90^\circ$. Οι ευθείες ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο σημείο Ζ, ενώ οι ευθείες ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο σημείο Ε.

(α) Βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta$ και $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\Delta$.

(β) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{EZ} = 2R$.

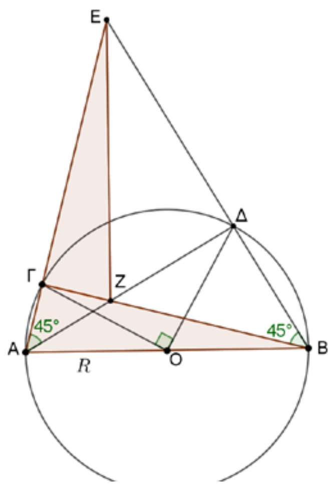
Σημείωση: *Να κάνετε στο φύλλο των απαντήσεων σας το δικό σας σχήμα.*



Λύση

(α) Οι γωνίες $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta$ και $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\Delta$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας R και βαίνουν στο τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ στο οποίο βαίνει και η επίκεντρη γωνία $\Gamma\hat{\mathrm{O}}\Delta = 90^\circ$. Άρα είναι

$$\Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta = \Gamma\hat{\mathrm{B}}\Delta = \frac{\Gamma\hat{\mathrm{O}}\Delta}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ.$$



Σχήμα 2

(β) Επειδή $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = 90^\circ$ και $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta = 45^\circ$, το τρίγωνο $\mathrm{A\Gamma Z}$ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με $\mathrm{A\Gamma} = \Gamma\mathrm{Z}$. Επειδή $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{E} = 180^\circ - \mathrm{A\Gamma B} = 90^\circ$ και $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = \Gamma\hat{\mathrm{B}}\Delta = 45^\circ$, το τρίγωνο $\mathrm{B\Gamma E}$ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με $\mathrm{B\Gamma} = \Gamma\mathrm{E}$.
Έτσι τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΕΖ έχουν τις δύο κάθετες πλευρές του ίσες μία προς μία, δηλαδή μία κάθετη πλευρά ίση $\mathrm{A\Gamma} = \Gamma\mathrm{Z}$ και $\mathrm{B\Gamma} = \Gamma\mathrm{E}$. Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε θα έχουν και $\mathrm{EZ} = \mathrm{AB} = 2R$.

Πρόβλημα 4
Έχουμε πέντε κάρτες Α, Β, Γ, Δ, Ε που πάνω σε καθεμία από αυτές είναι γραμμένος ένας θετικός ακέραιος. Με αυτές τις κάρτες σχηματίζονται συνολικά δέκα διαφορετικές τριάδες. Για καθεμία από αυτές τις τριάδες, καταγράφουμε το άθροισμα των τριών καρτών. Διαπιστώνουμε ότι προκύπτουν δύο μόνο διαφορετικά αθροίσματα, το 15 και το 13. Να προσδιορίσετε τους δυνατούς αριθμούς των πέντε καρτών.

Λύση
Επειδή τα δυνατά αθροίσματα των τριάδων είναι μόνο δύο, το 15 και το 13 συμπεραίνουμε ότι δεν μπορούν να υπάρχουν τρεις κάρτες με διαφορετικούς αριθμούς.
Πράγματι, αν υπήρχαν τρεις κάρτες με διαφορετικούς μεταξύ τους αριθμούς , έστω x, y, z και οι άλλες δύο κάρτες είχαν τους αριθμούς α και β, τότε θα είχαμε συνολικά τρία διαφορετικά αθροίσματα της μορφής $\alpha+\beta+x, \alpha+\beta+y, \alpha+\beta+z,$ το οποίο είναι αντίθετο στην υπόθεση.
Επίσης συμπεραίνουμε ότι δεν είναι δυνατόν όλες οι κάρτες να έχουν τον ίδιο αριθμό, γιατί τότε θα είχαμε ένα μόνο δυνατό άθροισμα τριάδων.
Επομένως πάνω στις κάρτες υπάρχουν δύο διαφορετικοί θετικοί ακέραιοι, έστω x, y , με $x > y$. Τότε τα δυνατά αθροίσματα τριάδων, διατεταγμένα από το μεγαλύτερο προς το μικρότερο, είναι:

$$x+x+x = 3x > x+x+y = 2x+y > x+y+y = x+2y > y+y+y = 3y.$$

Επειδή τα δυνατά αθροίσματα είναι μόνο δύο, παρατηρούμε ότι ο αριθμός y πρέπει να υπάρχει μία μόνο φορά, γιατί:

- Αν το y υπάρχει σε τέσσερις κάρτες, τότε το x θα υπάρχει μόνο σε μία κάρτα και τα δυνατά αποτελέσματα τριάδων θα είναι $x+2y=15,\ 3y=13$, που δεν δίνει ακέραιες τιμές για τα x, y.
- Αν το y υπάρχει σε τρεις κάρτες, τότε το x θα υπάρχει σε δύο κάρτες και τα δυνατά αποτελέσματα τριάδων θα είναι $2x+y > x+2y > 3y$, δηλαδή τρία διαφορετικά.
- Αν το y υπάρχει σε δύο κάρτες, τότε το x θα υπάρχει σε τρεις κάρτες και τα δυνατά αποτελέσματα τριάδων θα είναι $3x > 2x+y > x+2y$, δηλαδή τρία διαφορετικά.

Επομένως, τα δυνατά αθροίσματα είναι τα :

$$x+x+x = 3x,\ x+x+y = 2x+y, \ \text{ με } \ 3x > x+2y,$$

οπότε έχουμε:

$$3x = 15,\ 2x+y = 13 \Leftrightarrow x = 5,\ y = 3.$$

Επομένως, μία κάρτα έχει τον αριθμό 3 και οι υπόλοιπες τέσσερις έχουν τον αριθμό 5.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί α, β είναι τέτοιοι ώστε: $\alpha^3+\beta^3=2\alpha\beta(\alpha+\beta)$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\mathrm{K}=\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}+\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$\alpha^3+\beta^3=2\alpha\beta(\alpha+\beta)\Leftrightarrow(\alpha+\beta)\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)=2\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

$$\Leftrightarrow(\alpha+\beta)\left(\alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2\right)=0\overset{\alpha+\beta>0}{\Leftrightarrow}\alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2=0$$

$$\overset{\beta>0}{\Leftrightarrow}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-3\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)+1=0\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\beta}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Επειδή το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-3\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)+1=0$ ισούται με 1, έπεται ότι οι αριθμοί $\rho_1=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ και $\rho_2=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ (ή με αντίστροφη σειρά) είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-3\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)+1=0$ με άθροισμα $\rho_1+\rho_2=3$. Επομένως, έχουμε:

$$\mathrm{K}=\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2=\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-2=3^2-2=7$$

Πρόβλημα 2

Οι θετικοί ακέραιοι n, m είναι τέτοιοι, ώστε οι αριθμοί $\dfrac{50}{3n-2}$ και $\dfrac{243}{4m-1}$ να είναι θετικοί ακέραιοι.

(α) Να βρεθεί η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση

$$A=2(n+1)-3(m+2)+7.$$

(β) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση:

$$B=\frac{162}{n^2}-\frac{m^2}{3721}.$$

Λύση

Οι θετικοί διαιρέτες του 50 είναι οι αριθμοί 1, 2, 5, 10, 25, 50, οπότε ο $3n-2$ είναι κάποιος από αυτούς, οπότε ο $3n$ είναι κάποιος από τους 3, 4, 7, 12, 27, 52 οπότε οι πιθανές τιμές του n, αφού είναι θετικός ακέραιος, είναι 1, 4, 9.

Οι θετικοί διαιρέτες του $243=3^5$ είναι οι αριθμοί 1, 3, 9, 27, 81, 243 οπότε ο $4m-1$ είναι κάποιος από αυτούς, οπότε ο $4m$ είναι κάποιος από τους 2, 4, 10, 28, 82, 244, οπότε οι πιθανές τιμές του m είναι 1, 7, 61.

(α) Η παράσταση $A=2(n+1)-3(m+2)+7=2n-3m+3$ παίρνει τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή της όταν ο ακέραιος n πάρει τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του και ο ακέραιος m πάρει τη μικρότερη δυνατή τιμή του. Τότε είναι: $\max A=2\cdot9-3\cdot1+3=18$.

(β) Έχουμε ότι $B=\frac{162}{n^2}-\frac{m^2}{3721}$, οπότε η παράσταση B παίρνει τη μικρότερη δυνατή τιμή της όταν ο ακέραιος n πάρει τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του και ο ακέραιος m πάρει επίσης τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του. Τότε έχουμε:

$$\min B=\frac{162}{9^2}-\frac{61^2}{3721}=\frac{162}{81}-\frac{3721}{3721}=2-1=1.$$

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς x,y,z που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$\frac{y+3x}{xy}=\frac{3z+5y}{yz}=\frac{5x+z}{zx}=\frac{140}{x^2+y^2+z^2}.$$

Λύση

Οι δύο πρώτες εξισώσεις μπορούν να γραφούν:

$$\frac{1}{x}+\frac{3}{y}=\frac{3}{y}+\frac{5}{z}=\frac{5}{z}+\frac{1}{x}\Leftrightarrow\frac{1}{x}=\frac{5}{z},\ \frac{1}{x}=\frac{3}{y}\Leftrightarrow y=3x,\ z=5x.$$

Τότε έχουμε:

$$\frac{3z+5y}{yz}=\frac{140}{x^2+y^2+z^2}\Leftrightarrow\frac{15x+15x}{15x^2}=\frac{140}{x^2+9x^2+25x^2}\Leftrightarrow\frac{30x}{15x^2}=\frac{140}{35x^2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{x}=\frac{140}{35x^2}\Leftrightarrow\frac{2}{x}=\frac{4}{x^2}\Leftrightarrow 2x^2=4x\Leftrightarrow 2x(x-2)=0\overset{x\neq 0}{\Longleftrightarrow}x=2.$$

Άρα έχουμε: $x=2,\ y=6,\ z=10.$

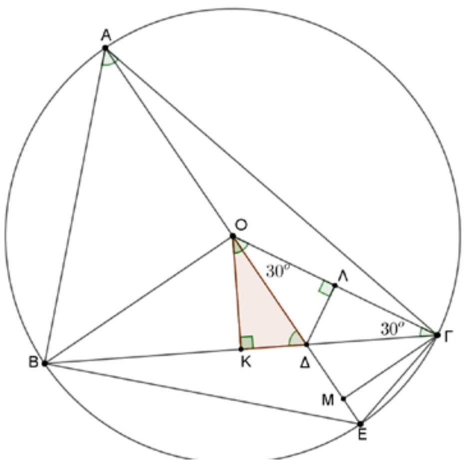
Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}}=60^\circ$. Η διάμετρος ΑΕ του περιγεγραμμένου κύκλου $C(\mathrm{O},R)$ του τριγώνου ΑΒΓ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ, έτσι ώστε $\mathrm{B\Delta}=2\cdot\mathrm{\Delta\Gamma}$.

(α) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{\Delta\hat{O}\Gamma}=30^\circ$

(β) Να εκφράσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΕΓ συναρτήσει της πλευράς $\mathrm{B\Gamma}=\alpha$.

Λύση



Σχήμα 3

(α) Φέρουμε την $\mathrm{OK} \perp \mathrm{B\Gamma}$, οπότε το Κ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ και $\mathrm{K\Gamma} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2} = \frac{\alpha}{2}$.

Επειδή $\frac{\mathrm{B\Delta}}{2} = \frac{\Delta\Gamma}{1} = \frac{\mathrm{B\Delta} + \Delta\Gamma}{2+1} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{3} = \frac{\alpha}{3} \Rightarrow \Delta\Gamma = \frac{\alpha}{3}$ και $\mathrm{K\Delta} = \mathrm{K\Gamma} - \Delta\Gamma = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{3} = \frac{\alpha}{6}$.

Επίσης $\mathrm{O}\hat{\Gamma}\Delta = \mathrm{O}\hat{\Gamma}\mathrm{K} = 90^\circ - \mathrm{K}\hat{\mathrm{O}}\Gamma = 90^\circ - \hat{\mathrm{A}} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, οπότε, αν φέρουμε $\Delta\Lambda \perp \mathrm{O\Gamma}$, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΔΛ με $\Delta\hat{\Gamma}\Lambda = 30^\circ$ προκύπτει ότι η απέναντι κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή : $\Delta\Lambda = \frac{\Delta\Gamma}{2} = \frac{\alpha}{6}$.

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το ημίτονο τη γωνίας των 30° στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΔΛ, οπότε έχουμε: $\Delta\Lambda = \Delta\Gamma \cdot \eta\mu 30^\circ = \frac{\alpha}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\alpha}{6}$.

Επομένως, τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΚΔ και ΟΛΔ έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία (ΟΔ κοινή υποτείνουσα και $\mathrm{K\Delta} = \Lambda\Delta$), οπότε είναι ίσα. Άρα θα έχουν $\mathrm{K}\hat{\mathrm{O}}\Delta = \Delta\hat{\mathrm{O}}\Lambda$ και αφού $\mathrm{K}\hat{\mathrm{O}}\Delta + \Delta\hat{\mathrm{O}}\Lambda = \mathrm{K}\hat{\mathrm{O}}\Gamma = 60^\circ$, έπεται ότι $\mathrm{K}\hat{\mathrm{O}}\Delta = \Delta\hat{\mathrm{O}}\Lambda = 30^\circ \Rightarrow \Delta\hat{\mathrm{O}}\Gamma = 30^\circ$.

(β) Επειδή το τρίγωνο ΑΟΓ είναι ισοσκελές με $\mathrm{OA} = \mathrm{O\Gamma} = R,$ και την εξωτερική του γωνία $\Delta\hat{\mathrm{O}}\Gamma = 30^\circ$, έπεται ότι $\mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \mathrm{O}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \frac{\Delta\hat{\mathrm{O}}\Gamma}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$. Επομένως θα είναι

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma - \mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ.$$

Τότε το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με ύψος την ακτίνα ΒΟ. Από το τρίγωνο ΟΚΓ προκύπτει η σχέση της ακτίνας R με την πλευρά α , αφού είναι $\mathrm{OK} = \frac{R}{2}$ και

$$\mathrm{O\Gamma}^2 - \mathrm{OK}^2 = \mathrm{K\Gamma}^2 \Rightarrow R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{3R^2}{4} = \frac{\alpha^2}{4} \Rightarrow \alpha = R\sqrt{3}.$$

Το ύψος ΓΜ του τριγώνου ΑΓΕ παρατηρούμε προκύπτει από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΓΜ με $\mathrm{M}\hat{\mathrm{O}}\Gamma = 30^\circ$ ότι είναι $\Gamma\mathrm{M} = \frac{\mathrm{O\Gamma}}{2} = \frac{R}{2}$.

Για το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΕΓ έχουμε:

$$\mathrm{E}_{(\mathrm{AB E\Gamma})} = \mathrm{E}_{(\mathrm{ABE})} + \mathrm{E}_{(\mathrm{AE\Gamma})} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{AE} \cdot \mathrm{BO} + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{AE} \cdot \Gamma\mathrm{M} = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot R + \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot \frac{R}{2} = \frac{3R^2}{2} = \frac{\alpha^2}{2}.$$

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση: $\left||x+8| - 3x\right| = \frac{x+7}{6}$**.**

Λύση

Λόγω της ύπαρξης των απόλυτων τιμών θα εργαστούμε σε κατάλληλα διαστήματα που θα μας επιτρέπουν να αποφύγουμε τις απόλυτες τιμές. Παρατηρούμε πρώτα ότι, λόγω της απόλυτης τιμής στο πρώτο μέλος, πρέπει: $\frac{x+7}{6} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -7$.

Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$\left|x+8-3x\right|=\frac{x+7}{6}\Leftrightarrow\left|8-2x\right|=\frac{x+7}{6}\qquad (1).$$

Επειδή το πρόσημο του όρου $8-2x$ αλλάζει εκατέρωθεν του 4, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(α) $-7\le x<4$. Τότε

$$(1)\Leftrightarrow 8-2x=\frac{x+7}{6}\Leftrightarrow 48-12x=x+7\Leftrightarrow 13x=41\Leftrightarrow x=\frac{41}{13}<4,$$

η οποία είναι δεκτή γιατί ανήκει στο διάστημα $\left[-7,4\right)$.

(β) $x\ge 4$. Τότε

$$(1)\Leftrightarrow 2x-8=\frac{x+7}{6}\Leftrightarrow 12x-48=x+7\Leftrightarrow 11x=55\Leftrightarrow x=5>4, \text{ δεκτή.}$$

Πρόβλημα 2

Αν οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί x,y,z ικανοποιούν τις ισότητες

$$x+2y=y+3z=z+5x,$$

να βρείτε:

(α) Την τιμή των λόγων $\frac{x}{y}$ και $\frac{z}{y}$.

(β) Τις τιμές των $x,\ y,\ z$ για τις οποίες η παράσταση $x^2+y^2+z^2-2y-144$ παίρνει την ελάχιστη τιμή της.

Λύση

Αν θέσουμε $x+2y=y+3z=z+5x=t$, τότε έχουμε:

$$\left.\begin{cases}x+2y=t\\ y+3z=t\\ z+5x=t\end{cases}\right\}\Rightarrow\left.\begin{cases}x+2y=t\\ -2y-6z=-2t\\ 6z+30x=6t\end{cases}\right\}\Rightarrow 31x=5t\Rightarrow x=\frac{5t}{31}.$$

Τότε λαμβάνουμε:

$$x+2y=t\Rightarrow\frac{5t}{31}+2y=t\Rightarrow 2y=\frac{26t}{31}\Rightarrow y=\frac{13t}{31},$$

$$z+5x=t\Rightarrow z+\frac{25t}{31}=t\Rightarrow z=\frac{6t}{31}.$$

Επομένως έχουμε: $\frac{x}{y}=\frac{5}{13},\ \frac{z}{y}=\frac{6}{13}$.

(β) Εκφράζουμε την παράσταση συναρτήσει της μεταβλητής y, οπότε έχουμε:

$$\left(\frac{5}{13}y\right)^2+y^2+\left(\frac{6}{13}y\right)^2-2y-144=\frac{230}{169}y^2-2y-144=f\left(y\right),$$

Επειδή ο συντελεστής του y^2 είναι θετικός, η παράσταση παίρνει την ελάχιστη τιμή της για $y=-\frac{-2}{2\cdot\frac{230}{169}}=\frac{169}{230}$. Τότε είναι $x=\frac{5}{13}y=\frac{5}{13}\cdot\frac{169}{230}=\frac{13}{46},\quad z=\frac{6}{13}\cdot\frac{169}{230}=\frac{78}{230}=\frac{39}{115}$.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη $\left(x,y\right)$ που είναι λύσεις της εξίσωσης

$$x^2+6x\cdot\sigma\upsilon\nu\left(xy\right)+9=0$$

και ανήκουν στο ορθογώνιο $D=\left\{\left(x,y\right):-\pi\le x\le\pi,-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}\right\}$ του Καρτεσιανού επιπέδου $\mathrm{O}xy$.

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση γράφεται:

$$x^2+6x\cdot\sigma\upsilon\nu\left(xy\right)+9=0\Leftrightarrow x^2+6x\cdot\sigma\upsilon\nu\left(xy\right)+9\left[\sigma\upsilon\nu^2\left(xy\right)+\eta\mu^2\left(xy\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[x+3\sigma\upsilon\nu\left(xy\right)\right]^2+\left[3\eta\mu\left(xy\right)\right]^2=0\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x+3\sigma\upsilon\nu\left(xy\right)=0\\3\eta\mu\left(xy\right)=0\end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x+3\sigma\upsilon\nu\left(xy\right)=0\\xy=2\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}\end{matrix}\right\}\ \acute{\eta}\ \left\{\begin{matrix}x+3\sigma\upsilon\nu\left(xy\right)=0\\xy=(2\kappa+1)\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}\end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x=-3\\y=\frac{2\kappa\pi}{-3},\kappa\in\mathbb{Z}\end{matrix}\right\}\ \text{ή}\ \left\{\begin{matrix}x=3\\y=\frac{(2\kappa+1)\pi}{3},\kappa\in\mathbb{Z}\end{matrix}\right\}.$$

Για να ανήκουν τα παραπάνω ζεύγη στο ορθογώνιο D πρέπει

$$-\frac{\pi}{2}\le\frac{2\kappa\pi}{-3}\le\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow-\frac{3}{4}\le\kappa\le\frac{3}{4},\ \kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\kappa=0\qquad\text{ή}$$

$$-\frac{\pi}{2}\le\frac{(2\kappa+1)\pi}{3}\le\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow-\frac{3}{2}\le2\kappa+1\le\frac{3}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow-\frac{5}{4}\le\kappa\le\frac{1}{4}\Leftrightarrow\kappa\in\left\{-1,0\right\},$$

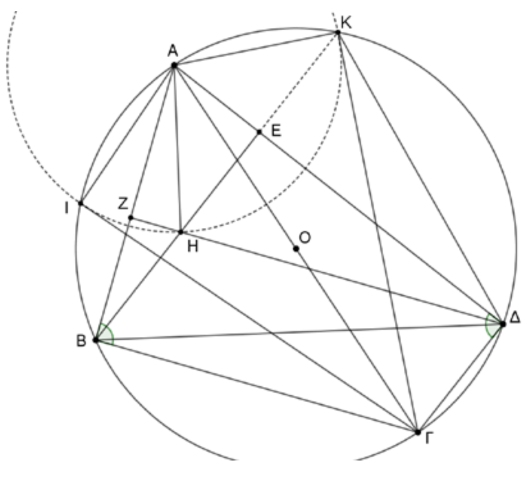
οπότε προκύπτουν τα ζεύγη:

$$\left(3,-\frac{\pi}{3}\right),\left(-3,\ 0\right),\left(3,\ \frac{\pi}{3}\right).$$

Πρόβλημα 4

Έστω ΑΒΓΔ τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο $C_1\left(\mathrm{O},R\right)$ τέτοιο ώστε $\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Delta}=90^\circ$. Έστω Η το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΔ. Ο κύκλος $C_2\left(\mathrm{A},\mathrm{AH}\right)$ κέντρου Α και ακτίνας ΑΗ τέμνει τον κύκλο $C_1\left(\mathrm{O},R\right)$ στα σημεία Ι και Κ. Να αποδείξετε ότι: $\Gamma\mathrm{I}=\Gamma\mathrm{K}=\mathrm{B}\Delta$.

Λύση



Σχήμα 4

Τα τρίγωνα ΓΙΚ και ΓΚΑ είναι ορθογώνια, αφού η ΑΓ είναι διάμετρος και έχουν κοινή υποτείνουσα και $\mathrm{AI} = \mathrm{AK}$, ως ακτίνες του κύκλου $C_2(\mathrm{A}, \mathrm{AH})$. Επομένως τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα και θα έχουν και $\Gamma\mathrm{I} = \Gamma\mathrm{K}$.

Επειδή η ΒΚ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΔ, έχουμε ότι: $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = 90^\circ - \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta$.

Έχουμε επιπλέον ότι:

$\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K} = \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{K}$ (εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο)

$\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{K} = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$ (εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο)

$\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z} = 90^\circ - \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta$ (γιατί ΓΖ ύψος του τριγώνου ΑΒΔ).

Άρα είναι $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = 90^\circ - \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta = \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}$, οπότε τα σημεία Α, Η, Ε, Κ είναι συνευθειακά. Επειδή επιπλέον οι ευθείες ΒΚ και ΓΔ είναι παράλληλες, ως κάθετες προς την ευθεία ΑΔ, έπεται ότι το τετράπλευρο ΒΓΔΚ είναι τραπέζιο εγγεγραμμένο στον κύκλο $C_1(\mathrm{O}, R)$ και άρα ισοσκελές. Επομένως οι διαγώνιοι του ΓΚ και ΒΔ είναι ίσες.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε πόσοι θετικοί ακέραιοι της μορφής

$$\mathrm{A} = \overline{xxxabc} = x \cdot 10^5 + x \cdot 10^4 + x \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c,$$

όπου x, a, b, c ψηφία με $x \neq 0$, διαιρούνται με το 37.

Λύση

Ο ακέραιος Α μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathrm{A} = \overline{xxxabc} = x \cdot 10^3 \cdot 111 + a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c = x \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 37 + \overline{abc} = \pi o\lambda.37 + \overline{abc},$$

για κάθε $x \in \{1, 2, ..., 9\}$. Από την παραπάνω σχέση προκύπτει η ισοδυναμία

$$37 \mid \mathrm{A} \Leftrightarrow 37 \mid \overline{abc}.$$

Όμως όλοι οι το πολύ τριψήφιοι θετικοί ακέραιοι που διαιρούνται με το 37 είναι της μορφής $37\kappa, \kappa \in \mathbb{Z}$, που ικανοποιούν τη σχέσεις $0 \leq 37\kappa \leq 999$. Έχουμε

$$0 \leq 37\kappa \leq 999, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 0 \leq \kappa \leq 27, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Επομένως υπάρχουν 28 θετικοί ακέραιοι με τρία το πολύ ψηφία που διαιρούνται με το 37 και επειδή για το σχηματισμό των πρώτων τριών ψηφίων του Α υπάρχουν 9 δυνατές περιπτώσεις, προκύπτει ότι συνολικά υπάρχουν $9 \cdot 28 = 252$ θετικοί ακέραιοι της δεδομένης μορφής που διαιρούνται με το 37.

Πρόβλημα 2

Στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = |mx + 4| + |mx - 4|, m > 0$ και $y = 12$ ορίζουν κυρτό επίπεδο σχήμα του οποίου το εμβαδό ισούται με 20 τ. μ. Να προσδιορίσετε την τιμή της πραγματικής παραμέτρου $m > 0$.

Λύση

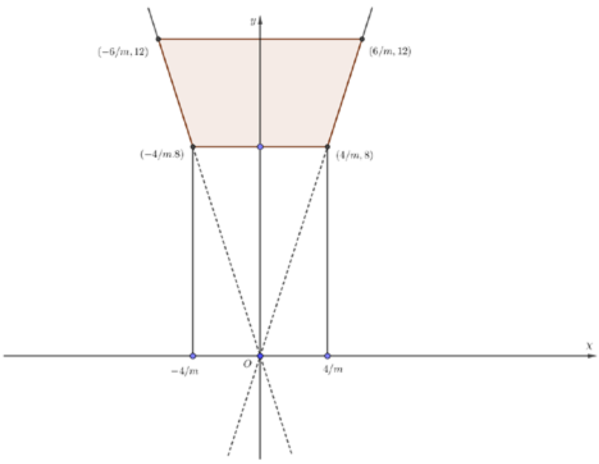
Η εξίσωση $y = |mx + 4| + |mx - 4|$, $m \in \mathbb{R}$, παίρνει τη μορφή

$$y = m \cdot \left| x + \frac{4}{m} \right| + m \cdot \left| x - \frac{4}{m} \right| = m \cdot \left(\left| x + \frac{4}{m} \right| + \left| x - \frac{4}{m} \right| \right), m > 0,$$

οπότε θεωρώντας την τιμή του x στα διαστήματα $\left(-\infty, -\frac{4}{m}\right), \left[-\frac{4}{m}, \frac{4}{m}\right]$ και $\left[\frac{4}{m}, +\infty\right)$ έχουμε:

$$y = |mx+4| + |mx-4| = \begin{cases} -2mx, \;\; \alpha\nu \;\; x < -\frac{4}{m} \\ 8, \; \alpha\nu \;\; -\frac{4}{m} \leq x \leq \frac{4}{m} \;\; , \\ 2mx, \quad \alpha\nu \;\; x > \frac{4}{m} \end{cases} \quad m > 0.$$

Επομένως η γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης είναι μία τεθλασμένη γραμμή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, με σημεία αλλαγής κατεύθυνσης τα $\mathrm{A}\left(-\frac{4}{m}, 8\right)$ και $\mathrm{B}\left(\frac{4}{a}, 8\right)$. Η εξίσωση $y = 12$ ορίζει ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, 12)$. Οι δύο γραφικές παραστάσεις τέμνονται στα σημεία $\Gamma\left(\frac{6}{m}, 12\right)$ και $\Delta\left(-\frac{6}{m}, 12\right)$, οπότε ορίζουν το ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις μήκους $\frac{8}{m}$ και $\frac{12}{m}$, ενώ το ύψος τους έχει μήκος 4. Επομένως το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι $\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Gamma\Delta) = \frac{40}{m}$. Από την εξίσωση $\frac{40}{m} = 20 \Leftrightarrow m = 2$.



Σχήμα 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται η αλγεβρική παράσταση: $\mathrm{A} = \sqrt{3\left|4 - x^2\right|^2 - 2x^4 + 16x^2 - 32}$

Να απλοποιήσετε την παράσταση Α και να βρείτε το πλήθος των πραγματικών λύσεων της εξίσωσης $\mathrm{A} = \alpha x + 4$, για κάθε τιμή της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$.

Λύση

Έχουμε

$$\mathrm{A}=\sqrt{3\left|4-x^2\right|^2-2x^4+16x^2-32}=\sqrt{3\left(4-x^2\right)^2-2\left(x^4+8x^2-16\right)}=$$
$$=\sqrt{3\left(4-x^2\right)^2-2\left(x^2-4\right)^2}=\sqrt{\left(x^2-4\right)^2}=\left|x^2-4\right|$$

Άρα είναι

$$\mathrm{A}=\left|x^2-4\right|=\begin{cases} x^2-4, & \text{αν } |x|\geq 2 \\ 4-x^2, & \text{αν } |x|<2 \end{cases}$$

Για την επίλυση της εξίσωσης $\mathrm{A}=\alpha x+4,\ \alpha\in\mathbb{R}$, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Περίπτωση 1. $x\leq -2$ ή $x\geq 2$. Τότε η εξίσωση γίνεται:

$\mathrm{A}=\alpha x+4 \Leftrightarrow x^2-4=\alpha x+4 \Leftrightarrow x^2-\alpha x-8=0$, η οποία έχει διακρίνουσα $\Delta=\alpha^2+32>0$, οπότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες λύσεις, $x_1=\dfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+32}}{2},\ x_2=\dfrac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+32}}{2}$, για κάθε τιμή $\alpha\in\mathbb{R}$.

Για τη λύση $x_1=\dfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+32}}{2}$, ισχύει ότι:

$$x_1\geq 2 \Leftrightarrow \alpha+\sqrt{\alpha^2+32}\geq 4 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2+32}\geq 4-\alpha \Leftrightarrow \alpha\geq -2,$$

γιατί η ανίσωση αληθεύει για κάθε $\alpha\geq 4$, ενώ για $\alpha<4$ είναι ισοδύναμη με την ανίσωση

$$\alpha^2+32\geq(4-\alpha)^2 \Leftrightarrow \alpha^2+32\geq \alpha^2-8\alpha+16 \Leftrightarrow 8\alpha\geq -16 \Leftrightarrow \alpha\geq -2.$$

Για τη λύση $x_1=\dfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+32}}{2}$, ισχύει ότι:

$$x_1\leq -2 \Leftrightarrow \alpha+\sqrt{\alpha^2+32}\leq -4 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2+32}\leq -(4+\alpha)\ \text{(αδύνατη)},$$

αφού η ανίσωση είναι αδύνατη για κάθε $\alpha\geq -4$, ενώ για $\alpha<-4$ είναι ισοδύναμη με την ανίσωση

$$\alpha^2+32\leq(4+\alpha)^2 \Leftrightarrow \alpha^2+32\leq \alpha^2+8\alpha+16 \Leftrightarrow 8\alpha\geq 16 \Leftrightarrow \alpha\geq 2,\ \text{άτοπο.}$$

Επομένως η λύση x_1 είναι δεκτή για $\alpha\geq -2$ και ανήκει στο διάστημα $[+2,+\infty)$.

Για τη λύση $x_2=\dfrac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+32}}{2}$, ισχύει ότι:

$$x_2\geq 2 \Leftrightarrow \alpha-\sqrt{\alpha^2+32}\geq 4 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2+32}\leq \alpha-4\ \text{(αδύνατη)},$$

αφού η ανίσωση είναι αδύνατη για κάθε $\alpha\leq 4$, ενώ για $\alpha>4$ είναι ισοδύναμη με την ανίσωση

$$\alpha^2+32\leq(\alpha-4)^2 \Leftrightarrow \alpha^2+32\leq \alpha^2-8\alpha+16 \Leftrightarrow 8\alpha\leq -16 \Leftrightarrow \alpha\leq -2,\ \text{άτοπο.}$$

Για τη λύση $x_2=\dfrac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+32}}{2}$, ισχύει ότι:

$$x_2\leq -2 \Leftrightarrow \alpha-\sqrt{\alpha^2+32}\leq -4 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2+32}\geq \alpha+4,$$

η οποία αληθεύει για κάθε $\alpha\leq -4$, ενώ για $\alpha>-4$ είναι ισοδύναμη με την ανίσωση

$$\alpha^2+32\geq(\alpha+4)^2 \Leftrightarrow \alpha^2+32\geq \alpha^2+8\alpha+16 \Leftrightarrow 8\alpha\leq 16 \Leftrightarrow \alpha\leq 2.$$

Επομένως η λύση x_2 είναι δεκτή για $\alpha\leq 2$ και ανήκει στο διάστημα $(-\infty,-2]$.

Άρα η εξίσωση $\mathrm{A}=\alpha x+4,\ \alpha\in\mathbb{R}$ έχει:

- δύο λύσεις στο σύνολο $(-\infty,2]\cup[2,+\infty)$, όταν $-2\leq\alpha\leq 2$

- μία λύση στο σύνολο $(-\infty, 2] \cup [2, +\infty)$, όταν $\alpha < -2$ ή $\alpha > 2$.

Περίπτωση 2. $-2 < x < 2$. Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$\mathrm{A} = \alpha x + 4 \Leftrightarrow 4 - x^2 = \alpha x + 4 \Leftrightarrow x^2 + \alpha x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (δεκτή) ή } x = -\alpha.$$

Η λύση $x = -\alpha$ είναι δεκτή, εφόσον $-2 < -\alpha < 2 \Leftrightarrow -2 < \alpha < 2$.

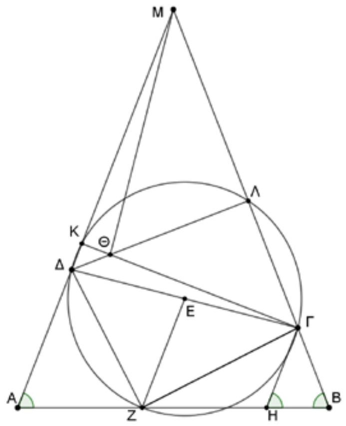
Επομένως η εξίσωση $\mathrm{A} = \alpha x + 4,\ \alpha \in \mathbb{R}$ έχει:

- τέσσερις πραγματικές λύσεις για $-2 < \alpha < 2,\ \alpha \neq 0$
- τρεις πραγματικές λύσεις για $\alpha \in \{-2, 0, +2\}$
- δύο πραγματικές λύσεις για $\alpha < -2$ ή $\alpha > 2$.

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε $\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{B}} < 90^\circ$ και $\mathrm{A\Delta} + \mathrm{B\Gamma} = \Delta\Gamma$. Η παράλληλη ευθεία προς την πλευρά ΑΔ από το μέσο Ε της πλευράς ΓΔ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ζ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΓΔΖ τέμνει τις ευθείες ΑΔ και ΒΓ στα σημεία Κ και Λ, αντίστοιχα. Αν οι ευθείες ΓΚ και ΔΛ τέμνονται στο σημείο Θ και οι ευθείες ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο σημείο Μ, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΜΘ είναι κάθετη προς την ευθεία ΓΔ.

Λύση



Σχήμα 6

Φέρουμε τη ΓΗ παράλληλη προς τη ΑΔ που τέμνει την ΑΒ στο σημείο Η. Τότε

$\Gamma\hat{\mathrm{H}}\mathrm{B} = \hat{\mathrm{A}}$ (εντός εκτός και επί τα αυτά στις παράλληλες ΓΗ και ΑΔ)

$\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{B}}$ (από υπόθεση).

Επομένως είναι:

$$\Gamma\hat{\mathrm{H}}\mathrm{B} = \hat{\mathrm{B}} \Rightarrow \Gamma\mathrm{H} = \Gamma\mathrm{B}\ . \qquad (1)$$

Επειδή το Ε είναι μέσο της πλευράς ΔΓ του τραπεζίου ΑΒΓΔ και η ΕΖ είναι παράλληλη στις βάσεις, θα έχουμε

$$\mathrm{EZ} = \frac{\mathrm{A\Delta} + \Gamma\mathrm{H}}{2} \overset{(1)}{=} \frac{\mathrm{A\Delta} + \mathrm{B\Gamma}}{2} \overset{υπόθεση}{=} \frac{\Gamma\Delta}{2}.$$

Επομένως στο τρίγωνο ΓΔΖ η διάμεσος ΖΕ ισούται με το μισό της πλευρά στην οποία αντιστοιχεί, οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο Ζ, δηλαδή $\Gamma\hat{\mathrm{Z}}\Delta = 90^\circ$.

Επιπλέον, η ΓΖ είναι διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΓΔΖ, οπότε

$$\Gamma\mathrm{K}\Delta = 90^\circ = \Delta\hat{\Lambda}\Gamma.$$

Επομένως οι ΓΚ και ΔΛ είναι ύψη στο τρίγωνο ΜΔΓ, οπότε το σημείο τομής τους Θ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΜΔΓ. Άρα θα είναι $\mathrm{M\Theta} \perp \Gamma\Delta$.