



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
**778<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”**  
**ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2018**

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΠΡΟΕΔΡΟΥΣ ΤΩΝ ΤΟΠΙΚΩΝ ΝΟΜΑΡΧΙΑΚΩΝ  
ΕΠΙΤΡΟΠΩΝ, ΠΡΟΕΔΡΟΥΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΩΝ ΚΕΝΤΡΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΤΗΡΗΤΕΣ

1. Παρακαλούμε να διαβάσετε προσεκτικά τις οδηγίες στους μαθητές.
2. Οι επιτηρητές των αιθουσών θα διανείμουν πρώτα κόλλες αναφοράς, στις οποίες οι μαθητές θα πρέπει απαραίτητα να γράψουν **ΕΠΩΝΥΜΟ, ΟΝΟΜΑ, ΣΧΟΛΕΙΟ, ΤΑΞΗ, το ΣΤΑΘΕΡΟ και ΚΙΝΗΤΟ ΤΗΛΕΦΩΝΟ**, τα οποία θα ελεγχθούν σε αντιπαραβολή με την ταυτότητα που θα έχουν οι εξεταζόμενοι, πριν καλυφθούν και μετά θα γίνει η διανομή φωτοτυπιών των θεμάτων στους μαθητές.
3. Να φωτοτυπηθεί και να μοιραστεί σε όλους τους μαθητές η επιστολή που σας αποστέλλουμε μαζί με τα θέματα.
4. Η εξέταση πρέπει να διαρκέσει ακριβώς τρεις (3) ώρες από τη στιγμή που θα γίνει η διανομή φωτοτυπιών (9-12 περίπου). Δε θα επιτρέπεται σε κανένα μαθητή ν' αποχωρήσει πριν παρέλθει μία ώρα από την έναρξη της εξέτασης.
5. Οι επιτηρητές των αιθουσών έχουν το δικαίωμα ν' ακυρώσουν τη συμμετοχή μαθητών, αν αποδειχθεί ότι αυτοί έχουν χρησιμοποιήσει αθέμιτα μέσα, σημειώνοντας τούτο στις κόλλες των μαθητών. Η επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε. έχει δικαίωμα να επανεξετάσει μαθητή, αν έχει λόγους να υποπτευεται ότι το γραπτό του είναι αποτέλεσμα χρήσης αθέμιτου μέσου.
6. Υπολογιστές οποιουδήποτε τύπου, καθώς και η χρήση κινητών απαγορεύονται.
7. Αμέσως μετά το πέρας της εξέτασης, οι κόλλες των μαθητών πρέπει να σφραγιστούν εντός φακέλου ή φακέλων, που θα έχουν την υπογραφή του υπεύθυνου του εξεταστικού κέντρου και ν' αποσταλούν στην Επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε., Πανεπιστημίου 34, 106 79 Αθήνα, αφού πρώτα στα παραρτήματα, εφόσον είναι εφικτό, γίνει μία πρώτη βαθμολόγηση, σύμφωνα με το σχέδιο βαθμολόγησης της επιτροπής διαγωνισμών. Θερμή παράκληση, όπως τα αδιόρθωτα γραπτά αποσταλούν στην ΕΜΕ άμεσα και τα διορθωμένα το αργότερο μέχρι 10 Φεβρουαρίου.
8. Τα αποτελέσματα του διαγωνισμού θα σταλούν στους Προέδρους των Τοπικών Νομαρχιακών Επιτροπών (ΤΝΕ) και τα Παραρτήματα της Ε.Μ.Ε.
9. Η Εθνική Ολυμπιάδα Μαθηματικών «**ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ**» θα γίνει στις **3 Μαρτίου 2018** στην Αθήνα. Από τους διαγωνισμούς αυτούς και επί πλέον από ένα τελικό προκριματικό διαγωνισμό στην Ε.Μ.Ε. που θα γίνει στις **31 Μαρτίου 2018** θα επιλεγεί η εθνική ομάδα, που θα συμμετάσχει στην **35<sup>η</sup> Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα (Σερβία, Μάιος 2018)**, στην **22<sup>η</sup> Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων (Ρόδος, Ιούνιος 2018)** και στην **59<sup>η</sup> Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα (Ρουμανία, Ιούλιος 2018)**.
10. Με την ευκαιρία αυτή, το Δ.Σ. της Ε.Μ.Ε. ευχαριστεί όλους τους συναδέλφους που συμβάλλουν με την εθελοντική τους συμμετοχή στην επιτυχία των Πανελλήνιων Μαθητικών Διαγωνισμών της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας.

**11. Παρακαλούμε τον Πρόεδρο της ΤΝΕ να αναπαράγει με τα ονόματα των επιτηρητών την ευχαριστήρια επιστολή του Δ.Σ. της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας και την παραδώσει στους επιτηρητές.**

Για το Διοικητικό Συμβούλιο  
της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Ο Πρόεδρος  
Ανάργυρος Φελλούρης  
Καθηγητής Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου

Ο Γενικός Γραμματέας  
Ιωάννης Τυρλής  
Καθηγητής Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ  
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34  
106 79 ΑΘΗΝΑ  
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025  
e-mail : info@hms.gr  
www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY  
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street  
GR. 106 79 - Athens - HELLAS  
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025  
e-mail : info@hms.gr  
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
78<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”  
20 Ιανουαρίου 2018

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**Πρόβλημα 1.**

Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left( \frac{2\beta + \alpha}{\beta} \right) \cdot \frac{500}{3} - 18 \cdot \left( \frac{\alpha - 11\beta}{\beta} \right),$$

αν δίνεται ότι:  $\frac{\alpha}{\beta} = 10$ .

**Πρόβλημα 2.**

Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός στοιχείων που πρέπει να αφαιρεθούν από το σύνολο  $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$ , έτσι ώστε το γινόμενο όλων των στοιχείων του που θα απομείνουν να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου;

**Πρόβλημα 3**

Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 115^\circ$  θεωρούμε στο εσωτερικό του σημείο  $\Delta$  τέτοιο ώστε  $\Delta\hat{B}\Gamma = 2 \cdot \Delta\hat{B}A$  και  $\Delta\hat{\Gamma}B = 2 \cdot \Delta\hat{\Gamma}A$ . Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία  $B\Delta\Gamma$ .

**Πρόβλημα 4**

Ο Γιάννης πήγε στην αγορά έχοντας μαζί του κέρματα των δύο ευρώ και του ενός ευρώ. Ο αριθμός των κερμάτων του ήταν 40. Για την αγορά που έκανε ξόδεψε ακριβώς το ένα τρίτο των κερμάτων των δύο ευρώ που είχε μαζί του. Την επόμενη μέρα ξόδεψε το 40% της αξίας των χρημάτων που του είχαν απομείνει. Αν και τις δύο μέρες ξόδεψε συνολικά 40 ευρώ, να βρείτε πόσα κέρματα των δύο ευρώ είχε αρχικά μαζί του.

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες  
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*

*Καλή επιτυχία!*



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
78<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”  
20 Ιανουαρίου 2018

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**Πρόβλημα 1.**

Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) - (\alpha\gamma + \beta\delta)^2,$$

αν δίνεται ότι  $\alpha = \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$ ,  $\beta = \left(-\frac{1}{2}\right)^3$ ,  $\gamma = -\frac{18}{2^3}$ ,  $\delta = \frac{1}{2^3}$ .

**Πρόβλημα 2**

Μία ομάδα εργατών τελειώνει το  $\frac{1}{4}$  ενός έργου στο  $\frac{1}{3}$  μιας ημέρας. Πόσες τέτοιες ομάδες εργατών της ίδιας απόδοσης χρειάζονται για να τελειώσουν 15 ίδια έργα σε 5 ημέρες;

**Πρόβλημα 3**

Θεωρούμε πολυώνυμο  $P(x) = a(x+2)^2 + b(x+3) + c$  όπου οι αριθμοί  $a, b, c$  είναι θετικοί ακέραιοι.

(α) Αν οι αριθμοί  $x, y$  είναι θετικοί ακέραιοι με  $x > y$ , να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$\frac{P(x) - P(y)}{x - y}$$
 είναι θετικός ακέραιος.

(β) Αν ο αριθμός  $P(8)$  είναι πολλαπλάσιο του 3, να αποδείξετε ότι και ο αριθμός  $P(2018)$  είναι πολλαπλάσιο του 3.

**Πρόβλημα 4**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με  $AB = AG$  και  $\hat{A} = 72^\circ$ . Ονομάζουμε Δ το ίχνος του ύψους από την κορυφή Γ και Ε το συμμετρικό του Α ως προς την ΓΔ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΓΕ περνά από το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

**Σημείωση:** Ο περιγεγραμμένος κύκλος ενός τριγώνου είναι ο κύκλος που περνάει από τις τρεις κορυφές του τριγώνου.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες  
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**  
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34  
106 79 ΑΘΗΝΑ  
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025  
e-mail : info@hms.gr  
www.hms.gr



**GREEK MATHEMATICAL SOCIETY**  
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street  
GR. 106 79 - Athens - HELLAS  
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025  
e-mail : info@hms.gr  
www.hms.gr

**ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ**  
**78<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**  
**ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”**  
**20 Ιανουαρίου 2018**

**Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**Πρόβλημα 1**

Αν  $x, y$  είναι πραγματικοί αριθμοί και οι αριθμοί  $a_1 = x + y$ ,  $a_2 = x^2 + y^2$  και  $a_4 = x^4 + y^4$  είναι ακέραιοι, να αποδείξετε ότι και ο αριθμός  $a_3 = x^3 + y^3$  είναι ακέραιος.

**Πρόβλημα 2**

Έστω  $A = κ(κ+1)(κ+2)(κ+3)$  το γινόμενο τεσσάρων διαδοχικών θετικών ακέραιων.

(α) Να αποδείξετε ότι ο  $A$  ισούται με το γινόμενο δύο διαδοχικών άρτιων ακέραιων.

(β) Είναι δυνατόν να είναι ο  $A$  ίσος με το τετράγωνο ενός ακέραιου;

**Πρόβλημα 3**

Σε ισοσκελές τραπέζιο  $ΑΒΓΔ$  το άθροισμα των δύο μη παράλληλων πλευρών του ίσο με  $4\sqrt{10}$  μέτρα, το ύψος του είναι ίσο με 6 μέτρα και το εμβαδόν του ισούται με 72 τετραγωνικά μέτρα. Αν το τραπέζιο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας  $R$ , να υπολογίσετε το μήκος της ακτίνας  $R$ .

**Πρόβλημα 4**

Πόσοι εξαψήφιοι θετικοί ακέραιοι πολλαπλασιαζόμενοι με το 2007 δίνουν αποτέλεσμα που να λήγει σε 2008;

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες*  
*Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*

*Καλή επιτυχία!*

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ  
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34  
106 79 ΑΘΗΝΑ  
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025  
e-mail : info@hms.gr  
www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY  
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street  
GR. 106 79 - Athens - HELLAS  
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025  
e-mail : info@hms.gr  
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
78<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”  
20 Ιανουαρίου 2018

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

**Πρόβλημα 1**

Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του  $a \in \mathbb{R}$  για τις οποίες αληθεύει, για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , η ανίσωση:

$$\frac{x}{x^2 + 2x + 3} > \frac{x + a}{x^2 + x + 1}.$$

**Πρόβλημα 2**

Αν  $x, y$  είναι πραγματικοί αριθμοί και οι αριθμοί  $a_1 = x + y$ ,  $a_2 = x^2 + y^2$  και  $a_4 = x^4 + y^4$  είναι ακέραιοι, να αποδείξετε ότι και ο αριθμός  $a_5 = x^5 + y^5$  είναι ακέραιος.

**Πρόβλημα 3**

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών  $\alpha, \beta$  έτσι ώστε  $\beta = 2\alpha$ . Στο εσωτερικό του θεωρούμε  $N$  κύκλους (που πιθανόν τέμνονται), έτσι ώστε το άθροισμα των μηκών των περιφερειών τους να είναι διπλάσιο της περιμέτρου του ορθογωνίου. Να αποδείξετε ότι  $N \geq 4$ .

**Πρόβλημα 4**

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) για το οποίο ισχύει  $\Gamma\Delta = 2AB$ . Αν  $E$  είναι το συμμετρικό του σημείου  $A$  ως προς το  $B$  και  $K$  είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $B\Gamma E$  να αποδείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου  $B\Gamma E$  εφάπτεται στην  $\Gamma\Delta$  στο σημείο  $\Gamma$  και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου  $B\Gamma K$  εφάπτεται στην  $\Gamma E$  στο σημείο  $\Gamma$ .

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες  
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*

*Καλή επιτυχία!*

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ  
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34  
106 79 ΑΘΗΝΑ  
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025  
e-mail : info@hms.gr  
www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY  
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street  
GR. 106 79 - Athens - HELLAS  
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025  
e-mail : info@hms.gr  
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
78<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”  
20 Ιανουαρίου 2018

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

**Πρόβλημα 1**

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$(a-1)(x^2+2x+2)^2=(a+1)(x^4+4),$$

για τις διάφορες τιμές της πραγματικής παραμέτρου  $a$ .

**Πρόβλημα 2**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=\sin x+\sin(x\sqrt{2})+\sin(x\sqrt{3})$ ,  $x\in\mathbb{R}$ . Να εξετάσετε, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός  $T>0$  τέτοιος ώστε

$$f(x+T)=f(x), \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

**Πρόβλημα 3**

Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB\parallel\Gamma\Delta$  και  $AB<\Gamma\Delta$ ) και έστω  $O$  το σημείο τομής των διαγώνιων του  $A\Gamma$  και  $B\Delta$ . Έστω ακόμη  $K$  το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου  $C_1$  του τριγώνου  $OAB$  και  $M$  το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου  $C_2$  του τριγώνου  $O\Delta\Gamma$ . Αν  $E$  είναι το σημείο τομής των ευθειών  $KA$  και  $M\Delta$  και  $Z$  είναι το σημείο τομής των  $KB$  και  $M\Gamma$ , να αποδείξετε ότι τα σημεία  $K, O, M$  καθώς και το μέσο της  $EZ$  βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

**Πρόβλημα 4**

Αν οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί  $p, q, r$  με  $p>q>r$  είναι πρώτοι, να εξετάσετε, αν οι αριθμοί  $\sqrt[3]{2018pq}, \sqrt[3]{2018qr}, \sqrt[3]{rp}$  μπορούν να ανήκουν στην ίδια αριθμητική πρόοδο.

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες  
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*

*Καλή επιτυχία!*