ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ

76ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”

16 Ιανουαρίου 2016

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ
Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Δίνονται οι δεκαδικοί περιοδικοί αριθμοί $\alpha = 0,\overline{2}$ και $\beta = 0,\overline{3}$.

(α) Να γράψετε τους αριθμούς α και β σε κλασματική μορφή.

(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = (3\alpha - 5\beta)^{2015} + (18\alpha^2 + \beta^2)^{2016}.$$

Λύση

(α) Έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha = 0,222\ldots$$
$$10\alpha = 2,222\ldots$$
$$10\alpha = 0,222\ldots + 2$$
$$10\alpha = \alpha + 2$$
$$9\alpha = 2$$

Άρα είναι $\alpha = \frac{2}{9}$..

Εργαζόμενοι ομοίως, βρίσκουμε ότι: $\beta = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

(β) Έχουμε:

$$A = (3\alpha - 5\beta)^{2015} + (18\alpha^2 + \beta^2)^{2016} = \left(3\cdot\frac{2}{9} - 5\cdot\frac{3}{9}\right)^{2015} + \left(18\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^2 + \left(\frac{3}{9}\right)^2\right)^{2016}$$

$$= \left(\frac{6}{9} - \frac{15}{9}\right)^{2015} + \left(18\cdot\frac{4}{81} + \frac{9}{81}\right)^{2016} = (-1)^{2015} + (+1)^{2016} = -1 + 1 = 0.$$

Πρόβλημα 2.

Να βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο με τον οποίο είτε πολλαπλασιάσουμε είτε διαιρέσουμε το 2016, προκύπτει ως αποτέλεσμα τέλειο τετράγωνο.

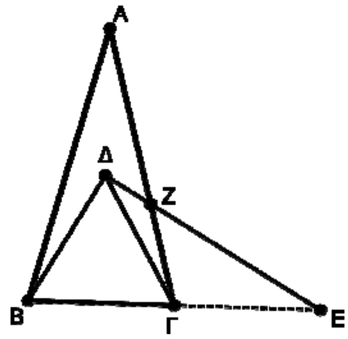
Λύση

Αναλύουμε το 2016 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Έχουμε ότι $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. Επομένως, όταν ο αριθμός 2016 πολλαπλασιαστεί με κάποιο παράγοντα, για να προκύψει γινόμενο που είναι τέλειο τετράγωνο, θα πρέπει ο παράγοντας αυτός να έχει ως παράγοντες τους αριθμούς 2 και 7 σε περιττό εκθέτη και κάθε άλλο πρώτο παράγοντα σε άρτιο εκθέτη. Ο μικρότερος τέτοιος αριθμός είναι ο $2 \cdot 7 = 14$. Παρατηρούμε ότι και η

διαίρεση $2016:(2\cdot 7)$ δίνει πηλίκο ίσο με $2^4\cdot 3^2=\left(2^2\cdot 3\right)^2=12^2$, που είναι τέλειο τετράγωνο.
Επομένως ο μικρότερος θετικός ακέραιος με τη ζητούμενη ιδιότητα είναι ο 14.

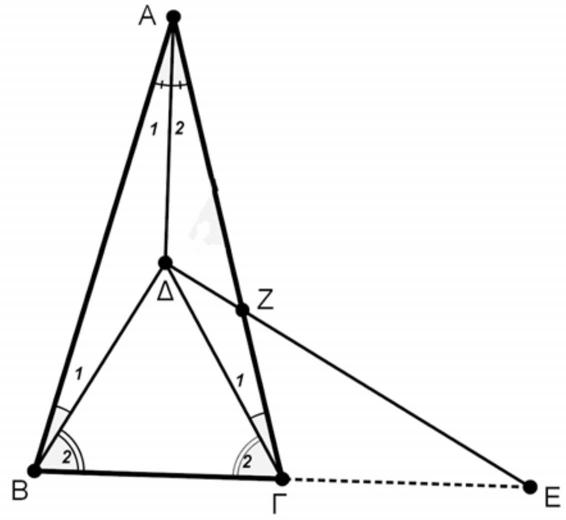
Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές $(AB=A\Gamma)$ και $\hat{A}=30^0$. Το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισόπλευρο και το σημείο E βρίσκεται στη προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ και είναι τέτοιο ώστε $B\Gamma=\Gamma E$. Αν η πλευρά $A\Gamma$ τέμνεται από τη ΔE στο σημείο Z, τότε:



(α) Να υπολογιστούν οι γωνίες $A\hat{B}\Delta$ και $A\hat{\Gamma}\Delta$.
(β) Να αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελή.
(γ) Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ορθογώνιο.

Λύση



Σχήμα 1

(α) Το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισόπλευρο άρα $\hat{B}_2=\hat{\Gamma}_2=60^0$.
Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\hat{A}=30^0$ άρα $\hat{B}=\hat{\Gamma}=75^0$.
Αφαιρώντας τις ισότητες κατά μέλη, έχουμε:

$$\hat{B}-\hat{B}_2=\hat{\Gamma}-\hat{\Gamma}_2=75^0-60^0=15^0\Rightarrow\hat{B}_1=\hat{\Gamma}_1=15^0.$$

β) Επειδή $AB=A\Gamma$ και $\Delta B=\Delta\Gamma$ η $A\Delta$ είναι μεσοκάθετη της $B\Gamma$, άρα και διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, οπότε

$$\hat{A}_1=\hat{A}_2=15^0.$$

Άρα τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $A\Delta B$ είναι ισοσκελή.
(γ) Το τρίγωνο $\Gamma\Delta E$ είναι ισοσκελές ($\Gamma\Delta=\Gamma E$) με

$$\Delta\hat{E}\Gamma=\hat{\Gamma}_1+Z\hat{\Gamma}E=15^0+(180^0-\hat{\Gamma})=$$

$$= 15^0 + 180^0 - 75^0 = 120^0.$$

Άρα $\Gamma\hat{\Delta}E = \Delta\hat{E}\Gamma = 30^0$. Επειδή από το ισόπλευρο τρίγωνο ΒΓΔ είναι

$$E\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{B}\Delta = 60^o,$$

έπεται ότι:

$$B\hat{\Delta}E = 180^\circ - \left(E\hat{B}\Delta + \Delta\hat{E}B\right) = 180^\circ - \left(60^\circ + 30^\circ\right) = 90^\circ,$$

οπότε το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ορθογώνιο.

.

Πρόβλημα 4.

Για την εκτέλεση ενός μεγάλου ερευνητικού έργου στο προαπαιτούμενο χρονικό όριο, ξεκίνησαν να εργάζονται συνολικά 500 ερευνητές. Όταν τελείωσε στην ώρα του το $\frac{1}{4}$ του έργου, αποχώρησαν 100 ερευνητές, οπότε το δεύτερο τέταρτο του έργου ολοκληρώθηκε με καθυστέρηση. Αποχώρησαν όμως τότε και άλλοι 100 ερευνητές, οπότε το τρίτο τέταρτο του έργου ολοκληρώθηκε με επιπλέον καθυστέρηση. Πόσοι ερευνητές πρέπει να προσληφθούν, ώστε το έργο να τελειώσει στον προγραμματισμένο χρόνο.

(*Υποθέτουμε ότι όλοι οι ερευνητές που εργάστηκαν, αλλά και αυτοί που θα προσληφθούν, δουλεύουν με την ίδια απόδοση*)

Λύση

Αφού στο πρώτο τέταρτο δούλευαν όλοι οι ερευνητές, το έργο ολοκληρώθηκε στην ώρα του και υποθέτουμε ότι χρειάστηκαν χρόνο t.

Στο δεύτερο τέταρτο σε κάθε χρονική μονάδα ολοκληρώνεται το $\frac{500-100}{500} = \frac{400}{500} = \frac{4}{5}$ από το έργο που θα ολοκληρωνόταν αν δούλευαν όλοι. Επομένως, για να ολοκληρωθεί το δεύτερο τέταρτο του έργου χρειάζεται χρόνος $\frac{5}{4}t$.

Όμοια για να ολοκληρωθεί το τρίτο τέταρτο του έργου θα χρειαστεί χρόνος $\frac{5}{3}t$.

Έστω τέλος ότι με την προσθήκη των ερευνητών στο τελευταίο τέταρτο χρειάζεται χρόνος x.

Το έργο για να τελειώσει στην ώρα ή νωρίτερα του χρειάζεται χρόνος τετραπλάσιος από το πρώτο τέταρτο που δούλευαν όλοι, δηλαδή χρόνος μικρότερος ή ίσος με $4t$.

Άρα, έχουμε τη σχέση:

$$t + \frac{5}{4}t + \frac{5}{3}t + x = 4t \Leftrightarrow x = t\left(3 - \frac{5}{4} - \frac{5}{3}\right) = t\frac{(36-15-20)}{12} = \frac{1}{12}t$$

Επομένως, αν έγινε πρόσληψη y ερευνητών στο τελευταίο τέταρτο δούλεψαν $300+y$ επιστήμονες και για το τελευταίο τέταρτο χρειάστηκαν χρόνο $x = \frac{500}{300+y}t$,

οπότε πρέπει $\frac{500}{300+y}t = \frac{1}{12}t \Rightarrow 6000 = y + 300 \Rightarrow 5700 = y$

Επομένως πρέπει να προσληφθούν 5700 επιστήμονες.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο: $P(x)=4(x+4)^2-28(x+4)+48$ και να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A=6\sqrt{P(-5)}-4\sqrt{P(4)}\ .$$

Λύση

(α) $P(x)=4(x+4)^2-28(x+4)+48=4\left[(x+4)^2-7(x+4)+12\right]$

$=4\left(x^2+8x+16-7x-28+12\right)=4\left(x^2+x\right)=4x(x+1).$

(β) $A=6\sqrt{P(-5)}-4\sqrt{P(4)}=6\sqrt{-20(-5+1)}-4\sqrt{16(4+1)}=6\sqrt{80}-4\sqrt{80}=2\sqrt{80}=8\sqrt{5}$

Πρόβλημα 2

(α) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$x(2x-1)(2x+1)+x=4x^3$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\mathrm{A}=4031\cdot 4033\cdot 32256+32256$ είναι κύβος ενός ακεραίου αριθμού τον οποίο και να προσδιορίσετε.

Λύση

(α) $x(2x-1)(2x+1)+x=x\left(4x^2-1\right)+x=4x^3-x+x=4x^3.$

(β) Επειδή οι ακέραιοι 4031 και 4033 διαφέρουν κατά δύο, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $2x-1=4031,\ 2x+1=4033$, οπότε θα είναι $x=2016$. Για να αντιστοιχήσουμε τον αριθμό Α στην προηγούμενη ταυτότητα, πρέπει να την πολλαπλασιάσουμε με τον ακέραιο $\dfrac{32256}{2016}=16$. Τότε αυτή γίνεται: $16x(2x-1)(2x+1)+16x=64x^3$, οπότε θέτοντας $x=2016$, έχουμε:

$$\mathrm{A}=4031\cdot 4033\cdot 32256+32256=64\cdot 2016^3=4^3\cdot 2016^3=(4\cdot 2016)^3=8064^3.$$

Επομένως, ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 8064.

Πρόβλημα 3

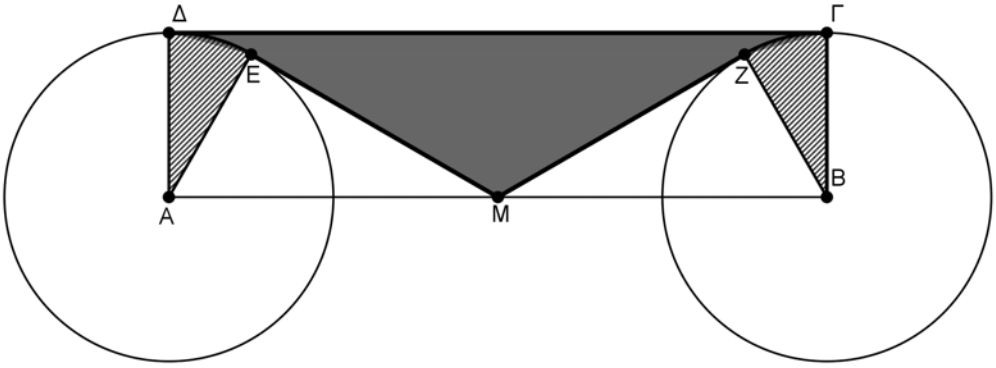
Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές $\mathrm{A\Delta}=\alpha$ και $\mathrm{AB}=4\alpha$. Με κέντρα τα σημεία Α , Β και ακτίνα α γράφουμε κύκλους Το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ, η ΜΕ είναι εφαπτόμενη του κύκλου κέντρου Α και η ΜΖ είναι εφαπτόμενη του κύκλου κέντρου Β, όπως φαίνεται στο σχήμα.

(α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}$.

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του μικτόγραμμου γραμμοσκιασμένου χωρίου ΔΕΜΖΓ που περικλείεται από το τόξο ΔΕ , τα τμήματα ΕΜ, ΜΖ , το τόξο ΖΓ και το τμήμα ΓΔ .

Λύση

(α) Επειδή το Μ είναι το μέσον του ΑΒ θα έχουμε ότι $\text{ΜΑ} = 2\alpha$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΕΑΜ έχουμε $\eta\mu(\text{Ε}\hat{\text{Μ}}\text{Α}) = \dfrac{\text{ΕΑ}}{\text{ΑΜ}} = \dfrac{\alpha}{2\alpha} = \dfrac{1}{2}$, οπότε $\text{Ε}\hat{\text{Μ}}\text{Α} = 30°$, $\text{Ε}\hat{\text{Α}}\text{Μ} = 90° - 30° = 60°$ και συνεπώς $\text{Ε}\hat{\text{Α}}\Delta = 90° - 60° = 30°$.



Σχήμα 2

(β) Το εμβαδό του μικτόγραμμου γραμμοσκιασμένου χωρίου προκύπτει, αν από το εμβαδό του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αφαιρέσουμε το εμβαδό των τριγώνων $\text{ΕΑΜ}, \text{ΜΖΒ}$ και αφαιρέσουμε και τους κυκλικούς τομείς $\Delta\text{ΑΕ}, \text{ΖΒΓ}$. Προφανώς $(\text{ΑΒΓ}\Delta) = \alpha \cdot 4\alpha = 4\alpha^2$

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε $\text{ΕΜ}^2 = 4\alpha^2 - \alpha^2 = 3\alpha^2 \Rightarrow \text{ΕΜ} = \alpha\sqrt{3}$, οπότε $(\text{ΕΑΜ}) = \dfrac{1}{2}\text{ΕΑ} \cdot \text{ΕΜ} = \dfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{2}$, και όμοια $(\text{ΒΖΜ}) = \dfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{2}$. Επιπλέον, ομοίως με το ερώτημα (α) υπολογίζουμε ότι $\text{Ζ}\hat{\text{Β}}\Gamma = 30^\circ$, οπότε έχουμε

$$\varepsilon\mu\beta\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha(\Delta\text{ΑΕ}) = \varepsilon\mu\beta\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha(\text{ΖΒΓ}) = \frac{\pi\alpha^2}{12}.$$

Επομένως, έχουμε:

$$\varepsilon\mu\beta\gamma\rho\alpha\mu.\,\chi\omega\rho\acute{\iota}o\upsilon\left(\Delta\text{ΕΜΖΓ}\right) = 4\alpha^2 - 2\cdot\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2} - 2\frac{\pi\alpha^2}{12} = \alpha^2\left(4 - \sqrt{3} - \frac{\pi}{6}\right).$$

Πρόβλημα 4

Δύο φίλοι, ο Γιάννης και ο Βαγγέλης έχουν μία σακούλα με καραμέλες. Ο Γιάννης βάζει το χέρι μέσα παίρνει κάποιες καραμέλες, και από αυτές που πήρε κρατάει τα $\dfrac{3}{4}$ και τις υπόλοιπες (από αυτές που πήρε) τις δίνει στο Βαγγέλη. Στη συνέχεια ο Βαγγέλης παίρνει τις υπόλοιπες που έμειναν στη σακούλα, κρατάει το $\dfrac{1}{12}$ και δίνει στο Γιάννη τις υπόλοιπες. Αν σε κάθε μοιρασιά καθένας παίρνει ακέραιο αριθμό από καραμέλες και τελικά οι καραμέλες του Γιάννη είναι εξαπλάσιες από τις καραμέλες του Βαγγέλη, να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό από καραμέλες που μπορεί να περιέχει η σακούλα.

Λύση.

Έστω α οι καραμέλες που πήρε από τη σακούλα ο Γιάννης και β οι καραμέλες που πήρε από τη σακούλα ο Βαγγέλης. Τότε ο Γιάννης κρατάει $\frac{3\alpha}{4}$ και δίνει στο Βαγγέλη $\frac{\alpha}{4}$. Και αφού σε κάθε μοιρασιά καθένας παίρνει ακέραιο αριθμό από καραμέλες, πρέπει το α να είναι πολλαπλάσιο του 4. (1)

Αντίστοιχα, ο Βαγγέλης κρατάει $\frac{\beta}{12}$ και δίνει στο Γιάννη $\frac{11\beta}{12}$.

Επομένως, ο Γιάννης έχει συνολικά $\frac{3\alpha}{4}+\frac{11\beta}{12}$ καραμέλες, ενώ ο Βαγγέλης έχει $\frac{\alpha}{4}+\frac{\beta}{12}$.

Επομένως πρέπει να ισχύει $6\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{\beta}{12}\right)=\frac{3\alpha}{4}+\frac{11\beta}{12} \Leftrightarrow \frac{3\alpha}{4}=\frac{5\beta}{12} \Leftrightarrow 9\alpha=5\beta$. (2)

Για να ισχύει η (2), πρέπει το α να είναι πολλαπλάσιο του 5. (3)

Από τις (1) και (3) συνάγουμε ότι το α πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του $5\cdot 4=20$, οπότε η ελάχιστη τιμή του α είναι 20. Επομένως, από τη σχέση (2) παίρνουμε $\beta=36$. Επομένως, ο ελάχιστος αριθμός από καραμέλες που μπορεί να περιέχει η σακούλα είναι $20+36=56$.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης

Α=$\left(\frac{25}{x+8}-\frac{\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt[3]{x^2}-2\cdot\sqrt[3]{x}+4}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{x^4}+8\cdot\sqrt[3]{x}}{9-\sqrt[3]{x^2}}+\frac{21-\sqrt[3]{x^2}}{3+\sqrt[3]{x}}$, όπου $x>0$ και $x\neq 27$.

Λύση.

Θέτουμε: $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}=y>0,\ x>0 \Rightarrow x=y^3,\ x,y>0$, οπότε η Α γράφεται:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{25}{y^3+8}-\frac{y+2}{y^2-2y+4}\right)\cdot\frac{y^4+8y}{9-y^2}+\frac{21-y^2}{3+y}$$

$$=\left[\frac{25}{(y+2)(y^2-2y+4)}-\frac{y+2}{y^2-2y+4}\right]\cdot\frac{y(y^3+8)}{(3-y)\cdot(3+y)}+\frac{21-y^2}{3+y}$$

$$=\frac{[5^2-(y+2)^2]}{(y+2)\cdot(y^2-2y+4)}\cdot\frac{y\cdot(y+2)\cdot(y^2-2y+4)}{(3+y)\cdot(3-y)}+\frac{21-y^2}{3+y}$$

$$=\frac{(7+y)(3-y)y(y+2)(y^2-2\cdot y+4)}{(y+2)(y^2-2y+4)(3+y)(3-y)}+\frac{21-y^2}{3+y}$$

$$=\frac{y(7+y)}{3+y}+\frac{21-y^2}{3+y}=\frac{7y+y^2+21-y^2}{3+y}=\frac{7(y+3)}{y+3}=7.$$

.

Πρόβλημα 2

Να εξετάσετε, αν η εξίσωση $64x^2+16^{10}x-2016^{2016}=0$ έχει ρητή ρίζα.

Λύση

Αν η εξίσωση έχει ρητή λύση, τότε η διακρίνουσα πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο ρητού. Έχουμε ότι $\Delta = 16^{20} + 4\cdot 64\cdot 2016^{2016}$ και ας υποθέσουμε ότι:

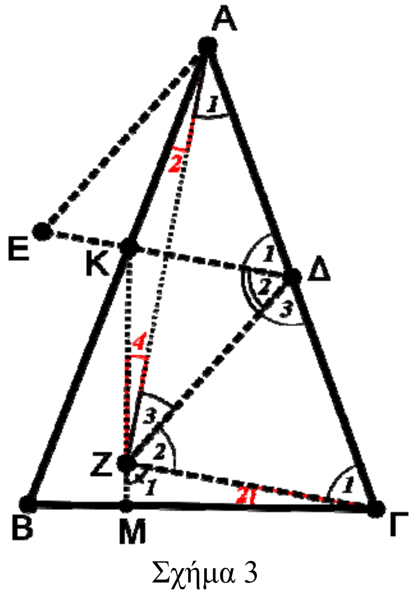
$$16^{20} + 4\cdot 64\cdot 2016^{2016} = \kappa^2,\ \text{όπου } \kappa \text{ ρητός.}$$

Αφού όμως το αριστερό μέλος είναι ακέραιος, θα πρέπει και ο κ να είναι ακέραιος. Παρατηρούμε ότι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού 16^{20} είναι 6 και το ίδιο ισχύει για το τελευταίο ψηφίο του αριθμού $4\cdot 64\cdot 2016^{2016} = 256\cdot 2016^{2016}$. Επομένως το τελευταίο ψηφίο του αριθμού $16^{20} + 4\cdot 64\cdot 2016^{2016}$ είναι το 2, αφού $6+6=12$. Όμως, κάθε τέλειο τετράγωνο λήγει σε κάποιο από τα ψηφία $0,1,4,5,6,9$, οπότε καταλήγουμε σε άτοπο. Επομένως η εξίσωση δεν έχει ρητή ρίζα.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ $(AB = A\Gamma)$ με $\hat{A} = 40^0$ και έστω Δ το μέσο της πλευράς $A\Gamma$. Θεωρούμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $AE\Delta$, $\Delta\Gamma Z$ των οποίων οι κορυφές E, Z βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο με ακμή την $A\Gamma$ και στο οποίο ανήκει η κορυφή B. Αν η $E\Delta$ τέμνει την AB στο K, να αποδείξετε ότι η KZ είναι κάθετη στη $B\Gamma$.

Λύση



Σχήμα 3

Έστω ότι η KZ τέμνει τη $B\Gamma$ στο σημείο M. Θα αποδείξουμε ότι $\hat{\Gamma}_2 + \hat{Z}_1 = 90^0$

Το τρίγωνο $\Gamma\Delta Z$ είναι ισόπλευρο, οπότε $\hat{\Gamma}_1 = 60^0$.

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($\hat{B} = \hat{\Gamma}$) με $\hat{A} = 40^0$ (οπότε από $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^0$) έχουμε: $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 70^0$.

$$\text{Άρα } \hat{\Gamma}_2 = \hat{\Gamma} - \hat{\Gamma}_1 = 70^0 - 60^0 = 10^0 \qquad (1).$$

Ισχύει $\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 + \hat{\Delta}_3 = 180^0$ και επειδή $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_3 = 60^0$ (ως γωνίες ισόπλευρων τριγώνων), συμπεραίνουμε ότι: $\hat{\Delta}_2 = 60^0$.

Το τρίγωνο $A\Delta Z$ είναι ισοσκελές (διότι $A\Delta = \Delta\Gamma = \Delta Z$) και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 60^0$.

Δηλαδή η ΔK είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Delta}Z$, οπότε θα είναι και μεσοκάθετος της βάσης AZ του (ισοσκελούς) τριγώνου $A\Delta Z$.

Εφόσον η ΔK είναι μεσοκάθετη της AZ, το τρίγωνο AKZ είναι ισοσκελές.

Από το ισοσκελές τρίγωνο $A\Delta Z$ έχουμε: $\hat{A}_1 = \hat{Z}_3$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο AKZ έχουμε: $\hat{A}_2 = \hat{Z}_4$.

Προσθέτοντας τις σχέσεις κατά μέλη έχουμε: $\hat{Z}_3 + \hat{Z}_4 = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 40^0$.

Από τη ισότητα $\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 + \hat{Z}_3 + \hat{Z}_4 = 180^0$ (με δεδομένο ότι $\hat{Z}_2 = 60^0$), καταλήγουμε:

$$\hat{Z}_1 = 80^0 \qquad (2).$$

Από τις σχέσεις $(1),(2)$ έχουμε: $\hat{\Gamma}_2 + \hat{Z}_1 = 90^0$.

Πρόβλημα 4

Τρεις φίλοι, ο Γιάννης και ο Βαγγέλης και ο Βασίλης, έχουν μία σακούλα με καραμέλες. Ο Γιάννης βάζει το χέρι μέσα στη σακούλα, παίρνει κάποιες καραμέλες, και από αυτές που πήρε κρατάει τα $\frac{3}{4}$ και τις υπόλοιπες (από αυτές που πήρε) τις μοιράζει εξίσου στους άλλους δύο. Ο Βαγγέλης παίρνει κάποιες από τις υπόλοιπες που έμειναν στη σακούλα, κρατάει το $\frac{1}{4}$ από αυτές και τις υπόλοιπες από αυτές που έβγαλε τις μοιράζει εξίσου στους άλλους δύο. Τέλος ο Βασίλης παίρνει τις υπόλοιπες που είχαν μείνει στη σακούλα κρατάει το $\frac{1}{6}$ από αυτές και τις υπόλοιπες από αυτές που έβγαλε τις μοιράζει εξίσου στους άλλους δύο. Αν σε κάθε μοιρασιά καθένας παίρνει θετικό ακέραιο αριθμό από καραμέλες και τελικά οι καραμέλες του Γιάννη είναι τριπλάσιες από τις καραμέλες του Βασίλη και οι καραμέλες του Βαγγέλη είναι διπλάσιες από τις καραμέλες του Βασίλη, να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό από καραμέλες που μπορεί να περιέχει η σακούλα.

Λύση

Έστω α οι καραμέλες που πήρε από τη σακούλα ο Γιάννης και β οι καραμέλες που πήρε από τη σακούλα ο Βαγγέλης και γ ο Βασίλης. Τότε ο Γιάννης κρατάει $\frac{3\alpha}{4}$ και δίνει στο Βαγγέλη και το Βασίλη $\frac{\alpha}{8}$.

Αντίστοιχα, ο Βαγγέλης κρατάει $\frac{\beta}{4}$ και δίνει στο Γιάννη και το Βασίλη $\frac{3\beta}{8}$. Και αφού σε κάθε μοιρασιά καθένας παίρνει ακέραιο αριθμό από καραμέλες, πρέπει το β να είναι πολλαπλάσιο του 8. (1)

Τέλος, ο Βασίλης κρατάει $\frac{\gamma}{6}$ και δίνει στο Γιάννη και το Βαγγέλη από $\frac{5\gamma}{12}$.

Επομένως ο Γιάννης έχει συνολικά $\frac{3\alpha}{4}+\frac{3\beta}{8}+\frac{5\gamma}{12}$ καραμέλες, ο Βαγγέλης έχει $\frac{\alpha}{8}+\frac{\beta}{4}+\frac{5\gamma}{12}$ και ο Βασίλης έχει $\frac{\alpha}{8}+\frac{3\beta}{8}+\frac{\gamma}{6}$.

Επομένως πρέπει να ισχύει

$$3\left(\frac{\alpha}{8}+\frac{3\beta}{8}+\frac{\gamma}{6}\right)=\frac{3\alpha}{4}+\frac{3\beta}{8}+\frac{5\gamma}{12} \Leftrightarrow \frac{3\beta}{4}+\frac{\gamma}{12}=\frac{3\alpha}{8} \Leftrightarrow 18\beta+2\gamma=9\alpha . \quad (2)$$

$$2\left(\frac{\alpha}{8}+\frac{3\beta}{8}+\frac{\gamma}{6}\right)=\frac{\alpha}{8}+\frac{\beta}{4}+\frac{5\gamma}{12}\Leftrightarrow\frac{\alpha}{8}+\frac{\beta}{2}=\frac{\gamma}{12}\Leftrightarrow 3\alpha+12\beta=2\gamma \qquad (3)$$

Προσθέτοντας τις (2), (3) κατά μέλη έχουμε ότι :

$$30\beta=6\alpha\Leftrightarrow 5\beta=\alpha$$

Οπότε από την (3) προκύπτει ότι:

$$27\beta=2\gamma .$$

Το β αφού είναι πολλαπλάσιο του 8 η ελάχιστη τιμή του είναι 8. Οπότε η ελάχιστη τιμή για το α είναι $\alpha=5\cdot 8=40$ και για το $\gamma=\frac{27\cdot 8}{2}=27\cdot 4=108$. Δηλαδή η ελάχιστη τιμή από καραμέλες που μπορεί να περιέχει η σακούλα είναι $8+40+108=156$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος $\alpha_1=(2-x)^2$, $\alpha_2=2^2+x^2,\dots$, όπου x πραγματικός αριθμός. Να προσδιορίσετε:

(α) Το άθροισμα των n πρώτων όρων της.

(β) Την τιμή του $n, (n>1)$, για την οποία ο μέσος όρος των n πρώτων όρων της προόδου ισούται με το τετράγωνο μιας παράστασης του x, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Λύση

(α) Η διαφορά της αριθμητικής προόδου είναι: $\omega=2^2+x^2-(2-x)^2=4x.$ Επομένως το άθροισμα των n πρώτων όρων της θα είναι:

$$S_n=\frac{\left[2(2-x)^2+4(n-1)x\right]n}{2}=\left(x^2+2(n-3)x+4\right)n.$$

(β) Ο μέσος όρος των n πρώτων όρων της προόδου ισούται με

$$\frac{S_n}{n}=x^2+2(n-3)x+4$$

και είναι τριώνυμο μεταβλητής x. Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=4(n-3)^2-16=4(n^2-6n+5)$. Επομένως το τριώνυμο ισούται με τέλειο τετράγωνο μιας πολυωνυμικής παράστασης του x, αν και μόνον, αν $\Delta=0\Leftrightarrow n^2-6n+5=0\Leftrightarrow n=1$ ή $n=5$.

Η τιμή $n=1$ απορρίπτεται, γιατί $n>1$. Επομένως, για $n=5$ είναι

$$\frac{S_5}{5}=x^2+4x+4=(x+2)^2 .$$

Αν ζητήσουμε οποιαδήποτε αλγεβρική παράσταση του x, τότε έχουμε

$\frac{S_n}{n}=x^2+2(n-3)x+4\geq 0$, για $x\in\mathbb{R}$, εφόσον $\Delta\leq 0\Leftrightarrow 1\leq n\leq 5$. Τότε, για

$n\in\{2,3,4,5\}$ ισχύει: $\frac{S_n}{n}=\left(\sqrt{x^2+2(n-3)x+4}\right)^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Πρόβλημα 2

Να λυθεί στο σύνολο των πραγματικών αριθμών η εξίσωση

$$10x^3 - 6x^2 - 12x - 8 = 0.$$

Λύση

Έχουμε

$$10x^3 - 6x^2 - 12x - 8 = 0 \Leftrightarrow 10x^3 - \left(6x^2 + 12x + 8\right) = 0.$$

Παρατηρούμε ότι η παράσταση που είναι μέσα στην παρένθεση γράφεται:

$$6x^2 + 12x + 8 = \left(x^3 + 6x^2 + 12x + 8\right) - x^3 = \left(x+2\right)^3 - x^3,$$

οπότε η εξίσωση γίνεται:

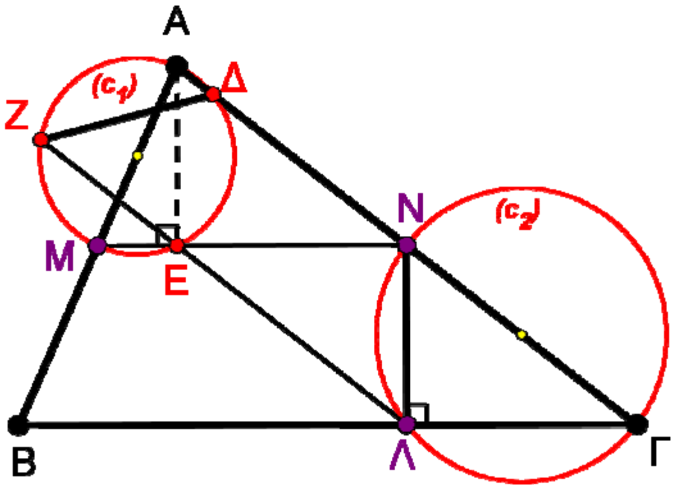
$$10x^3 - \left(6x^2 + 12x + 8\right) = 0 \Leftrightarrow 10x^3 - \left(x+2\right)^3 + x^3 = 0 \Leftrightarrow 11x^3 = \left(x+2\right)^3$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt[3]{11} = x + 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt[3]{11} - 1}.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (με $ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ$) και τα μέσα Μ, Ν των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Ο κύκλος (c_1) έχει διάμετρο την ΑΜ και τέμνει τις ΑΓ, ΜΝ στα σημεία Δ, Ε, αντίστοιχα. Ο κύκλος (c_2) έχει διάμετρο την ΓΝ και τέμνει την ΒΓ στο σημείο Λ. Η ΕΛ τέμνει το κύκλο (c_1) στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΔΝΛ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση



Σχήμα 4

Η γωνία $Α\hat{Ε}Μ$ είναι ορθή διότι είναι εγγεγραμμένη (στο κύκλο (c_1)) και βαίνει στη διάμετρο ΑΜ του κύκλου (c_1), οπότε θα είναι:

$$ΑΕ \perp ΜΝ \qquad (1).$$

Η γωνία $Ν\hat{Λ}Γ$ είναι ορθή διότι είναι εγγεγραμμένη (στο κύκλο (c_2)) και βαίνει στη διάμετρο ΝΓ του κύκλου (c_2), οπότε θα είναι

$$ΝΛ \perp ΒΓ \qquad (2).$$

Τα σημεία M, N είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε θα είναι:

$$\mathrm{MN} = // \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2} \qquad (3).$$

Από τις σχέσεις $(1),(2),(3)$ συμπεραίνουμε ότι: $\mathrm{AE} = \Lambda\mathrm{N} = \frac{\upsilon_\alpha}{2}$ και $\mathrm{AE} // \Lambda\mathrm{N}$.

Άρα το τετράπλευρο $\mathrm{AE\Lambda N}$ είναι παραλληλόγραμμο.

Το τετράπλευρο $\mathrm{A\Delta EZ}$ είναι ισοσκελές τραπέζιο , διότι είναι τραπέζιο $\mathrm{EZ} \parallel \mathrm{A\Delta}$, εγγεγραμμένο στον κύκλο (c_1). Άρα $\mathrm{AE} = \Delta\mathrm{Z}$ οπότε θα είναι και $\Delta\mathrm{Z} = \mathrm{N}\Lambda$.

Δηλαδή το τετράπλευρο $\Delta\mathrm{Z}\Lambda\mathrm{N}$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων (a,b) που είναι τέτοια ώστε ο αριθμός $\frac{a}{b} + \frac{17b}{36a}$ να είναι ακέραιος.

Λύση

Θέλουμε $\frac{a}{b} + \frac{17b}{36a} = \kappa$, όπου κ είναι ένας ακέραιος. Θέτουμε $\frac{a}{b} = x$ και τότε η σχέση γράφεται ως $x + \frac{17}{36x} = \kappa \Leftrightarrow 36x^2 - 36\kappa x + 17 = 0$ (1) και ουσιαστικά ψάχνουμε τις ρητές λύσεις της (1). Για να έχει ρητές λύσεις η (1) πρέπει η διακρίνουσα να είναι τέλειο τετράγωνο. Δηλαδή θέλουμε $\Delta = (36\kappa)^2 - 4\cdot 36\cdot 17 = (2\cdot 6)^2(9\kappa^2 - 17)$ να είναι τέλειο τετράγωνο, οπότε θέλουμε $9\kappa^2 - 17 = s^2$ για κάποιον θετικό ακέραιο s.

Τότε $(3\kappa)^2 - s^2 = 17 \Leftrightarrow (3\kappa - s)(3\kappa + s) = 17$ και αφού ο 17 είναι πρώτος και οι κ, s θετικοί ακέραιοι, έπεται ότι $\begin{cases} 3\kappa - s = 1 \\ 3\kappa + s = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \kappa = 3,\ s = 8$.

Για $\kappa = 3$ η παραπάνω εξίσωση έχει λύσεις τις $x_1 = \frac{17}{6}$ και $x_2 = \frac{1}{6}$, οπότε $\frac{a}{b} = \frac{17}{6}$ ή $\frac{a}{b} = \frac{1}{6}$, οπότε έχουμε για λύσεις τις $(a,b) = (17t, 6t)$ ή $(a,b) = (t, 6t)$ όπου t θετικός ακέραιος.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος $b_1 = (x-4)^2,\ b_2 = x^2 + 16, \ldots$, όπου x πραγματικός αριθμός. Να προσδιορίσετε:

(α) Το άθροισμα των n πρώτων όρων της.

(β) Την τιμή του $n, (n > 1)$, για την οποία ο μέσος όρος των n πρώτων όρων της προόδου ισούται με το τετράγωνο μιας παράστασης του x, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Λύση

(α) Η διαφορά της αριθμητικής προόδου είναι: $\omega = x^2 + 16 - (x-4)^2 = 8x.$

Επομένως το άθροισμα των n πρώτων όρων της θα είναι:

$$S_n=\frac{\left[2(x-4)^2+8(n-1)x\right]n}{2}=\left(x^2+4(n-3)x+16\right)n.$$

(β) Ο μέσος όρος των n πρώτων όρων της προόδου ισούται με

$$\frac{S_n}{n}=x^2+4(n-3)x+16$$

και μπορεί να θεωρηθεί ως τριώνυμο μεταβλητής x. Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=16(n-3)^2-64=16\left(n^2-6n+5\right)$. Επομένως το τριώνυμο ισούται με τέλειο τετράγωνο μιας πολυωνυμικής παράστασης του x, αν και μόνον, αν $\Delta=0 \Leftrightarrow n^2-6n+5=0 \Leftrightarrow n=1$ ή $n=5$.

Η τιμή $n=1$ απορρίπτεται, γιατί $n>1$. Επομένως, μόνον για $n=5$ είναι

$$\frac{S_5}{5}=x^2+8x+16=(x+4)^2.$$

Αν ζητήσουμε οποιαδήποτε αλγεβρική παράσταση του x, τότε έχουμε $\frac{S_n}{n}=x^2+4(n-3)x+16\geq 0$, για $x\in\mathbb{R}$, εφόσον $\Delta\leq 0 \Leftrightarrow 1\leq n\leq 5$. Τότε για $n\in\{2,3,4,5\}$ ισχύει: $\frac{S_n}{n}=\left(\sqrt{x^2+4(n-3)x+16}\right)^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Πρόβλημα 2

Να λυθεί στο σύνολο των πραγματικών αριθμών η εξίσωση:

$$10x^4-8x^3-24x^2-32x-16=0.$$

Λύση

Έχουμε

$$10x^4-8x^3-24x^2-32x-16=0 \Leftrightarrow 10x^4-\left(8x^3+24x^2+32x+16\right)=0.$$

Παρατηρούμε ότι η παράσταση που είναι μέσα στην παρένθεση γράφεται:

$$8x^3+24x^2+32x+16=\left(x^4+8x^3+24x^2+32x+16\right)-x^4=(x+2)^4-x^4,$$

οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$10x^4-\left(8x^3+24x^2+32x+16\right)=0 \Leftrightarrow 10x^4-(x+2)^4+x^4=0 \Leftrightarrow 11x^4=(x+2)^4$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt[4]{11}=x+2 \text{ ή } x\sqrt[4]{11}=-x-2 \Leftrightarrow x=\frac{2}{\sqrt[4]{11}-1} \text{ ή } x=-\frac{2}{\sqrt[4]{11}+1}.$$

Πρόβλημα 3

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathrm{A}\to R$, όπου $\mathrm{A}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και $f(x)\cdot g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathrm{A}$. Αν για κάθε $x,y\in\mathrm{A}$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$f\left(\frac{g(x)}{g(y)}\right)=\frac{f(g(x))}{y} \quad (1), \qquad g\left(\frac{f(x)}{f(y)}\right)=\frac{g(f(x))}{y}, \quad (2)$$

Να αποδείξετε ότι:

(α) Οι συναρτήσεις f,g είναι ‘1-1’ (ένα προς ένα).

(β) $f(x)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)=g(x)\cdot g\left(\frac{1}{x}\right)=1$ για κάθε $x\in\mathrm{A}$.

Λύση

(α) Έστω $x_1,x_2\in A$ με $g(x_1)=g(x_2)$. Θα αποδείξουμε ότι $x_1=x_2$.

Θέτοντας στη σχέση (1), όπου x το x_1 και όπου y το x_2, έχουμε:

$$f\left(\frac{g(x_1)}{g(x_2)}\right)=\frac{f\left(g(x_1)\right)}{x_2} \Leftrightarrow f(1)=\frac{f\left(g(x_1)\right)}{x_2} \Leftrightarrow f\left(g(x_1)\right)=f(1)\cdot x_2 \quad (\mathrm{A}).$$

Θέτοντας στη σχέση (1), όπου x το x_2 και όπου y το x_1, έχουμε:

$$f\left(\frac{g(x_2)}{g(x_1)}\right)=\frac{f\left(g(x_2)\right)}{x_1} \Leftrightarrow f(1)=\frac{f\left(g(x_2)\right)}{x_1} \Leftrightarrow f\left(g(x_2)\right)=f(1)\cdot x_1 \quad (\mathrm{B})$$

Από την ισότητα $g(x_1)=g(x_2)$ έχουμε: $f(g(x_1))=f(g(x_2)) \quad (\Gamma)$.

Από τις σχέσεις $(\mathrm{A}),(\mathrm{B}),(\Gamma)$ συμπεραίνουμε ότι: $x_1=x_2$.

Ομοίως, μέσω της σχέσης (2), αποδεικνύουμε ότι και η συνάρτηση f είναι ‘1-1’.

(β) Στις σχέσεις (1)**,**(2) θέτουμε όπου y το x και έχουμε τις σχέσεις:

$$f\left(\frac{g(x)}{g(x)}\right)=\frac{f\left(g(x)\right)}{x} \Leftrightarrow f(1)=\frac{f\left(g(x)\right)}{x} \Leftrightarrow f\left(g(x)\right)=f(1)\cdot x$$

$$g\left(\frac{f(x)}{f(x)}\right)=\frac{g\left(f(x)\right)}{x} \Leftrightarrow g(1)=\frac{g\left(f(x)\right)}{x} \Leftrightarrow g\left(f(x)\right)=g(1)\cdot x$$

που για $x=1$, γίνονται: $f\left(g(1)\right)=f(1)$ και $g\left(f(1)\right)=g(1)$.

Επειδή όμως οι συναρτήσεις f,g είναι ‘1-1’, θα ισχύει: $f(1)=g(1)=1$ που σε συνδυασμό με τις προηγούμενες ισότητες έχουμε: $f\left(g(x)\right)=g\left(f(x)\right)=x$.

Άρα η ισότητα (1) γίνεται: $f\left(\dfrac{g(x)}{g(y)}\right)=\dfrac{x}{y}$.

Στην τελευταία ισότητα θέτουμε όπου x το $f(x)$ και όπου y το $f(y)$.

Άρα $f\left(\dfrac{g\left(f(x)\right)}{g\left(f(y)\right)}\right)=\dfrac{f(x)}{f(y)} \Leftrightarrow f\left(\dfrac{x}{y}\right)=\dfrac{f(x)}{f(y)}$ και για $x=1$, έχουμε:

$$f\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{f(1)}{f(y)} \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{f(y)} \Leftrightarrow f(y)\cdot f\left(\frac{1}{y}\right)=1.$$

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ABC (με $AB<AC<BC$) και ο περιγεγραμμένος κύκλος του $c(O,R)$. Ο κύκλος $c_1(C,AB)$ (με κέντρο το σημείο C και ακτίνα AB) τέμνει τον κύκλο (c) στα σημεία D και E (το E ανήκει στο τόξο στο οποίο δεν ανήκει το σημείο A). Ο κύκλος $c_2(B,BD)$ (με κέντρο το σημείο B και ακτίνα BD) τέμνει τον κύκλο (c_1) στο σημείο F. Να αποδείξετε ότι η AF περνάει από το μέσο M της BC.

Λύση

Στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ABCD$, ισχύει $AB=CD$ (διότι CD ακτίνα του κύκλου (c_1)).

Άρα το τετράπλευρο $ABCD$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με $AB=CD$, $AD\,//\,BC$ **(*)**.

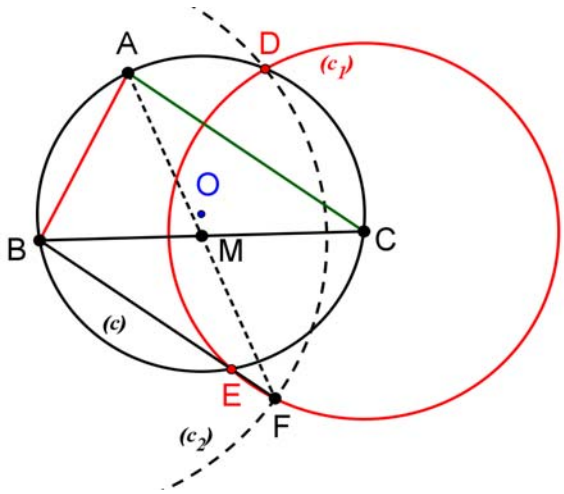
Από τις ίσες διαγώνιες του ισοσκελούς τραπεζίου $ABCD$ έχουμε:

$$AC=BD \qquad (1).$$

Στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ABEC$, ισχύει $AB = CD = CE$ (διότι $CD = CE$ ακτίνες του κύκλου (c_1)).

Άρα το τετράπλευρο $ABEC$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με $AB = CE$ και

$$AC // BE \qquad (2).$$



Σχήμα 5

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι τα σημεία B, E, F είναι συνευθειακά (θα αποδείξουμε ότι $E\hat{B}C = F\hat{B}C$).

Από το ισοσκελές τραπέζιο $ABEC$ έχουμε: $E\hat{B}C = A\hat{C}B = \hat{C}$ (3).

Η διάκεντρος BC των κύκλων (c_1) και (c_2) είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής τους DF.

Άρα, από το ισοσκελές τραπέζιο $ABCD$ έχουμε:

$$F\hat{B}C = C\hat{B}D = A\hat{C}B = \hat{C} \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε: $E\hat{B}C = F\hat{B}C = \hat{C}$.

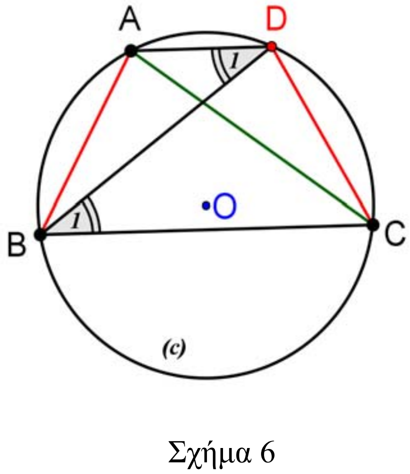
Από τη σχέση (2), έχουμε $AC // BE // BF$ και επειδή $AC = BF = BD$ (από τη σχέση (1)), καταλήγουμε ότι τα τμήματα AC, BF είναι ίσα και παράλληλα.

Δηλαδή το τετράπλευρο $ABFC$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι διαγώνιές του θα διχοτομούνται.

(*)

Ισχύει $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$ (διότι είναι εγγεγραμμένες στον ίδιο κύκλο και βαίνουν σε ίσα τόξα).

Οι γωνίες αυτές είναι εντός εναλλάξ στις AD και BC με τέμνουσα την BD. Άρα $AD // BC$, δηλαδή το τετράπλευρο $ABCD$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Σχήμα 6