ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 12 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2013

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΠΡΟΕΔΡΟΥΣ ΤΩΝ ΤΟΠΙΚΩΝ ΝΟΜΑΡΧΙΑΚΩΝ ΕΠΙΤΡΟΠΩΝ, ΠΡΟΕΔΡΟΥΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΩΝ ΚΕΝΤΡΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΤΗΡΗΤΕΣ

1. Παρακαλούμε να διαβάσετε προσεκτικά τις οδηγίες στους μαθητές.
2. Οι επιτηρητές των αιθουσών θα διανείμουν πρώτα κόλλες αναφοράς, στις οποίες οι μαθητές θα πρέπει απαραίτητα να γράψουν ***ΕΠΩΝΥΜΟ, ΟΝΟΜΑ, ΣΧΟΛΕΙΟ, ΤΑΞΗ, το ΣΤΑΘΕΡΟ και ΚΙΝΗΤΟ ΤΗΛΕΦΩΝΟ,*** τα οποία θα **ελεγχθούν σε αντιπαραβολή με την ταυτότητα** που θα έχουν οι εξεταζόμενοι, πριν καλυφθούν και μετά θα γίνει **η υπαγόρευση ή διανομή φωτοτυπιών** των θεμάτων στους μαθητές.
3. **Να φωτοτυπηθεί και να μοιραστεί σε όλους τους μαθητές η επιστολή που σας αποστέλλουμε μαζί με τα θέματα.**
4. Η εξέταση πρέπει να διαρκέσει ακριβώς τρεις (3) ώρες από τη στιγμή που θα γίνει η εκφώνηση των θεμάτων (9-12 περίπου). Δε θα επιτρέπεται σε κανένα μαθητή ν' αποχωρήσει πριν παρέλθει μία ώρα από την έναρξη της εξέτασης.
5. Οι επιτηρητές των αιθουσών έχουν το δικαίωμα ν' ακυρώσουν τη συμμετοχή μαθητών, αν αποδειχθεί ότι αυτοί έχουν χρησιμοποιήσει αθέμιτα μέσα, σημειώνοντας τούτο στις κόλλες των μαθητών. Η επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε. έχει δικαίωμα να επανεξετάσει μαθητή αν έχει λόγους να υποπτεύεται ότι το γραπτό του είναι αποτέλεσμα χρήσης αθέμιτου μέσου.
6. Υπολογιστές οποιουδήποτε τύπου καθώς και η χρήση κινητών απαγορεύονται.
7. Αμέσως μετά το πέρας της εξέτασης, οι κόλλες των μαθητών πρέπει να σφραγιστούν εντός φακέλου ή φακέλων, που θα έχουν την υπογραφή του υπεύθυνου του εξεταστικού κέντρου και ν' αποσταλούν στην **Επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε., Πανεπιστημίου 34, 106 79 Αθήνα,** αφού πρώτα στα παραρτήματα , εφόσον είναι εφικτό, γίνει μία πρώτη βαθμολόγηση, σύμφωνα με το σχέδιο βαθμολόγησης της επιτροπής διαγωνισμών.
8. Τα αποτελέσματα του διαγωνισμού θα σταλούν στους Προέδρους των Τοπικών Νομαρχιακών Επιτροπών (ΤΝΕ) και τα Παραρτήματα της Ε.Μ.Ε.
9. Η Εθνική Ολυμπιάδα Μαθηματικών **«ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»** θα γίνει στις **23 Φεβρουαρίου 2013** στην Αθήνα. Από τους διαγωνισμούς αυτούς και επί πλέον από ένα τελικό διαγωνισμό στην Ε.Μ.Ε. και μια προφορική εξέταση με προκαθορισμένη διαδικασία θα επιλεγεί η εθνική ομάδα, που θα συμμετάσχει στην **30^{η} Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα (Αλβανία, Μάιος 2013),** στην **17^{η} Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων (Αττάλεια, Τουρκία, Ιούνιος 2013)** και στην **54^{η} Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα (Κολομβία, Ιούλιος 2013).**
10. Με την ευκαιρία αυτή, το Δ.Σ. της Ε.Μ.Ε. ευχαριστεί όλους τους συναδέλφους που συμβάλλουν με την εθελοντική τους συμμετοχή στην επιτυχία των Πανελλήνιων Μαθητικών Διαγωνισμών της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας.
11. **Παρακαλούμε τον Πρόεδρο της ΤΝΕ να αναπαράγει με τα ονόματα των επιτηρητών την ευχαριστήρια επιστολή του Δ.Σ. της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας και την παραδώσει στους επιτηρητές.**

Για το Διοικητικό Συμβούλιο
της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Ο Πρόεδρος
Γρηγόριος Καλογερόπουλος
Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Ο Γενικός Γραμματέας
Εμμανουήλ Κρητικός
Λέκτορας Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 12 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2013

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$\mathrm{A}=\frac{2^2}{31}\cdot\left(3^3+1000^0+\frac{2}{9}:\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)\ \text{ και }\ \mathrm{B}=\left(1-\frac{40}{41}\right):\left(\frac{80}{3^4}-\frac{79}{9^2}\right)+\frac{67}{41}.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2
Ένας φορητός υπολογιστής έχει τιμή πώλησης 720 ευρώ σε μετρητά. Όταν ο πελάτης τον πληρώσει σε 12 ισόποσες μηνιαίες δόσεις, τότε επιβαρύνεται συνολικά με τόκους 5% πάνω στην τιμή πώλησης. Όταν ο πελάτης τον πληρώσει σε 24 ισόποσες μηνιαίες δόσεις τότε επιβαρύνεται συνολικά με τόκους 14% πάνω στην τιμή πώλησης. Να βρείτε σε καθεμία από τις δύο περιπτώσεις πόση θα είναι η μηνιαία δόση.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$. Από την κορυφή Α φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ παράλληλο προς τη βάση ΒΓ και ίσο με την πλευρά ΑΒ. Η ευθεία ΒΔ τέμνει την πλευρά $\mathrm{A\Gamma}$ στο σημείο Ε.

(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΒΔ διχοτομεί τη γωνία $\mathrm{A\hat{B}\Gamma}$.

(β) Αν το τρίγωνο $\mathrm{A\Delta E}$ είναι ισοσκελές, να βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}=\omega$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4
Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου το 60% παίζει ποδόσφαιρο, το 45% παίζει μπάσκετ, ενώ το 15% παίζει και ποδόσφαιρο και μπάσκετ. Αν υπάρχουν 24 μαθητές που δεν παίζουν κανένα από τα δύο αθλήματα, να βρείτε πόσους μαθητές έχει το Γυμνάσιο, πόσοι από αυτούς παίζουν ποδόσφαιρο και πόσοι από αυτούς παίζουν μπάσκετ.

Μονάδες 5

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 12 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2013

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
(α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{x^3}{y^2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^3+\frac{81x^2+27y}{y},\ \text{όταν } x=3^{-2}, y=3^{-3}.$$

Μονάδες 2

(β) Να βρείτε το πλήθος των ψηφίων του αριθμού $\mathrm{B}=16^{23}\cdot 5^{89}$, όταν αυτός γραφεί στη δεκαδική αναπαράστασή του.

Μονάδες 3

Πρόβλημα 2
Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου το 65% παίζει ποδόσφαιρο, το 45% παίζει μπάσκετ, ενώ το 20% παίζει και ποδόσφαιρο και μπάσκετ. Επιπλέον υπάρχουν 12 μαθητές που δεν παίζουν κανένα άθλημα, ενώ υπάρχουν άλλοι 24 μαθητές που παίζουν μόνο βόλεϊ. Να βρείτε πόσους μαθητές έχει το Γυμνάσιο, πόσοι από αυτούς παίζουν ποδόσφαιρο και πόσοι από αυτούς παίζουν μπάσκετ.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Προεκτείνουμε το ύψος του ΑΔ προς το μέρος του Α κατά τμήμα $\mathrm{AE}=\mathrm{A\Delta}$. Φέρουμε τις ΕΒ, ΕΓ και εξωτερικά του τριγώνου ΕΒΓ κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΕΖΓ. Έστω Μ το μέσον του τμήματος ΑΕ.
(i) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{AZ}=\mathrm{E\Gamma}$.
(ii) Να βρείτε το εμβαδό του τετραπλεύρου ΑΓΖΕ ως συνάρτηση του α.
(iii) Να βρείτε το εμβαδό του τετραπλεύρου ΒΓΖΜ ως συνάρτηση του α.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4
Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\left(ax+b\right) \text{ και } Q(x)=a^2x^3+4x^2+dx+e,$$

όπου οι συντελεστές a,b,c,d,e είναι θετικοί ακέραιοι. Αν ισχύει ότι $P(1)=21$, να βρείτε τις τιμές των a,b,c,d,e για τις οποίες τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα.

Μονάδες 5

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 12 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2013

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:
$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{|x|+x}{2}\le\frac{|x|+3+x^2}{4},\quad x\left(x^2+4\right)\left(x^2-5x+4\right)=0\,.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2
Να απλοποιήσετε τις κλασματικές παραστάσεις
$$\mathrm{A}(x,y)=\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(x^3-y^3\right)\left(x^3+y^3\right)}{\left(x^2-y^2\right)\left(x^4+y^4+x^2y^2\right)}\ \text{ και }\ \mathrm{B}(x,y)=\frac{4x^2+16y^2+16xy-25}{2x+4y+5},$$
αν $y\neq\pm x$ και $2x+4y+5\neq 0$, και να λύσετε την εξίσωση
$$\mathrm{A}(x,y)=\mathrm{B}(x,y)\,.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3
Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ, Ε των πλευρών του ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα, ώστε ΑΔ = ΑΕ. Οι κύκλοι $c_1(\mathrm{B},\mathrm{BE})$ και $c_2(\Gamma,\Gamma\Delta)$ τέμνουν την ευθεία ΒΓ στα σημεία $\mathrm{B}_1,\mathrm{B}_2$ και Γ_1,Γ_2, αντίστοιχα. Το σημείο B_1 βρίσκεται εκτός του τμήματος ΒΓ προς το μέρος του Β και το σημείο Γ_2 βρίσκεται εκτός του τμήματος ΒΓ προς το μέρος του Γ.
Να αποδείξετε ότι:
(α) Τα σημεία $\mathrm{E},\mathrm{B}_2,\Gamma_1,\Delta$ βρίσκονται επάνω σε κύκλο, έστω c_3.
(β) Τα σημεία $\mathrm{E},\mathrm{B}_1,\Gamma_2,\Delta$ βρίσκονται επάνω σε κύκλο, έστω c_4.
(γ) Το σημείο Α και τα κέντρα των κύκλων c_3 και c_4, βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4
Δίνεται η εξίσωση
$$a^2x^2+2a\left(\sqrt{2}-1\right)x+\sqrt{x-2}+3-2\sqrt{2}=0,$$
όπου $x\in\mathbb{R}$ άγνωστος και $a\in\mathbb{R}$ παράμετρος. Να λύσετε την εξίσωση για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου a.

Μονάδες 5

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 12 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2013

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$|x+y-1|+|x+2|+|y+2| \geq 5.$$

Να βρείτε τα ζεύγη (x, y) ακέραιων αριθμών, με $x<0$, για τα οποία ισχύει ή ισότητα:

$$|x+y-1|+|x+2|+|y+2| = 5.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει ότι

$$x^2\left(y^2-3y+2\right) \leq 4y(y-1)\left(xy-2x+2y-y^2\right),$$

να αποδείξετε ότι: $|2y-3| \leq 1$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma} < \mathrm{B\Gamma}$. Εξωτερικά του τριγώνου θεωρούμε ισοσκελή τρίγωνα $\mathrm{AB\Delta}$ ($\mathrm{AB} = \mathrm{A\Delta}$) και $\mathrm{A\Gamma E}$ ($\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{AE}$) με $\mathrm{B\hat{A}\Delta} = \mathrm{\Gamma\hat{A}E} = \hat{\theta} < 90^\circ$. Οι BE και $\mathrm{\Gamma\Delta}$ τέμνονται στο σημείο K. Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $\mathrm{A\Delta\Gamma}$ και ABE τέμνονται στο σημείο M. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{B\hat{A}K} = \mathrm{\Gamma\hat{A}M}$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ο αριθμός

$$\sqrt{13-2x}+\sqrt{13+2x}$$

είναι ακέραιος.

Μονάδες 5

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 12 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2013

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Στο σύνολο των ακεραίων, να λυθεί το σύστημα:

$$xy = z^2 + 2, \quad y^3 = x^3 + 2x^2 + 1.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Να βρείτε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f\left(x^2\right) - y^2 = f\left(x+y\right)\cdot f\left(x-y\right), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες ο αριθμός

$$\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x},$$

όπου $a>1$ πραγματική παράμετρος, παίρνει ακέραιες τιμές.

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι είναι δυνατόν να ορίσουμε την τιμή της παραμέτρου a έτσι ώστε ο αριθμός $\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}$ να είναι ακέραιος περισσότερες ή ίσες από K φορές, όπου K τυχόν θετικός ακέραιος.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ABC ($AB < AC < BC$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$. Η προέκταση του ύψους του AD τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του $c(O,R)$ στο σημείο E. Ο κύκλος $c_1(D,DA)$ τέμνει την πλευρά AC στο σημείο T, την ευθεία AB στο σημείο S, τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο H και την ευθεία OA στο σημείο Z. Να αποδείξετε ότι:

(α) Το τετράπλευρο $SBTC$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, έστω c_2.

(β) Τα σημεία O, D, E, Z, H και το κέντρο του κύκλου c_2, βρίσκονται επάνω στο ίδιο κύκλο.

Μονάδες 5

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ