



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 23 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΠΡΟΕΔΡΟΥΣ ΤΩΝ ΤΟΠΙΚΩΝ ΝΟΜΑΡΧΙΑΚΩΝ
ΕΠΙΤΡΟΠΩΝ, ΠΡΟΕΔΡΟΥΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΩΝ ΚΕΝΤΡΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΤΗΡΗΤΕΣ

1. Παρακαλούμε να διαβάσετε προσεκτικά τις οδηγίες στους μαθητές.
2. Οι επιτηρητές των αιθουσών θα διανείμουν πρώτα κόλλες αναφοράς, στις οποίες οι μαθητές θα πρέπει απαραίτητα να γράψουν **ΕΠΩΝΥΜΟ, ΟΝΟΜΑ, ΣΧΟΛΕΙΟ, ΤΑΞΗ, ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΚΑΤΟΙΚΙΑΣ και ΤΗΛΕΦΩΝΟ**, τα οποία θα ελεγχθούν σε αντιπαραβολή με την ταυτότητα που θα έχουν οι εξεταζόμενοι, πριν καλυφθούν και μετά θα γίνει η υπαγόρευση ή διανομή φωτοτυπιών των θεμάτων στους μαθητές.
3. Να φωτοτυπηθεί και να μοιραστεί σε όλους τους μαθητές η επιστολή που σας αποστέλλουμε μαζί με τα θέματα.
4. Η εξέταση πρέπει να διαρκέσει ακριβώς τρεις (3) ώρες από τη στιγμή που θα γίνει η εκφώνηση των θεμάτων (9-12 περίπου). Δε θα επιτρέπεται σε κανένα μαθητή ν' αποχωρήσει πριν παρέλθει μία ώρα από την έναρξη της εξέτασης.
5. Οι επιτηρητές των αιθουσών έχουν το δικαίωμα ν' ακυρώσουν τη συμμετοχή μαθητών, αν αποδειχθεί ότι αυτοί έχουν χρησιμοποιήσει αθέμιτα μέσα, σημειώνοντας τούτο στις κόλλες των μαθητών. Η επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε. έχει δικαίωμα να επανεξετάσει μαθητή αν έχει λόγους να υποπτευτείται ότι το γραπτό του είναι αποτέλεσμα χρήσης αθέμιτου μέσου.
6. Υπολογιστές οποιουδήποτε τύπου καθώς και η χρήση κινητών απαγορεύονται.
7. Αμέσως μετά το πέρας της εξέτασης, οι κόλλες των μαθητών πρέπει να σφραγιστούν εντός φακέλου ή φακέλων, που θα έχουν την υπογραφή του υπεύθυνου του εξεταστικού κέντρου και ν' αποσταλούν στην **Επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε., Πανεπιστημίου 34, 106 79 Αθήνα**, αφού πρώτα στα παραρτήματα, εφόσον είναι εφικτό, γίνει μία πρώτη βαθμολόγηση, σύμφωνα με το σχέδιο βαθμολόγησης της επιτροπής διαγωνισμών.
8. Τα αποτελέσματα του διαγωνισμού θα σταλούν στους Προέδρους των Τοπικών Νομαρχιακών Επιτροπών (ΤΝΕ) και τα Παραρτήματα της Ε.Μ.Ε.
9. Η Εθνική Ολυμπιάδα Μαθηματικών «**ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ**» θα γίνει στις **27 Φεβρουαρίου 2010** στην Αθήνα. Από το διαγωνισμό αυτό και επί πλέον από ένα τελικό προκριματικό διαγωνισμό στην Ε.Μ.Ε. συνοδευόμενο από μια προφορική εξέταση με προκαθορισμένη διαδικασία θα επιλεγούν οι εθνικές ομάδες, που θα συμμετάσχουν στην **27^η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα (Μολδαβία, Μάιος 2010)**, στην **14^η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων (Ρουμανία, Ιούνιος 2010)** και στην **51η Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα (Αστάνα, Καζακστάν, Ιούλιος 2010)**.
10. Με την ευκαιρία αυτή, το Δ.Σ. της Ε.Μ.Ε. ευχαριστεί όλους τους συναδέλφους που συμβάλλουν αφιλοκερδώς στην επιτυχία των Πανελληνίων Μαθητικών Διαγωνισμών της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας.

11. Παρακαλούμε τον Πρόεδρο της ΤΝΕ μαζί με τα γραπτά να μας στείλει το ονοματεπώνυμο και την ταχ. Δ/ση όλων των επιτηρητών για να τους σταλεί ονομαστική ευχαριστήρια επιστολή από το Δ.Σ. της ΕΜΕ.

ΓΙΑ ΤΟ Δ.Σ. ΤΗΣ Ε.Μ.Ε.

Ο Πρόεδρος
Καθηγητής Γρηγόρης Καλογερόπουλος

Ο Γενικός Γραμματέας
Ιωάννης Τυρλής



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 23 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010

Β' τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = 2010 - 2009 \cdot 2008 + 2010 \cdot 2008.$$

Μονάδες 2

(β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$B = \frac{3}{8} \cdot \left(2^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right) \quad \text{και} \quad \Gamma = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{11} \right) \cdot \left(\frac{1}{3^2} + \frac{20}{9} \right).$$

Μονάδες 3

Πρόβλημα 2

Ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $x = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$, $\alpha \neq 0$, έχει άθροισμα ψηφίων 10. Αν εναλλάξουμε το ψηφίο των εκατοντάδων με το ψηφίο των μονάδων του, τότε προκύπτει ακέραιος μικρότερος από τον x κατά 297. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του x ;

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

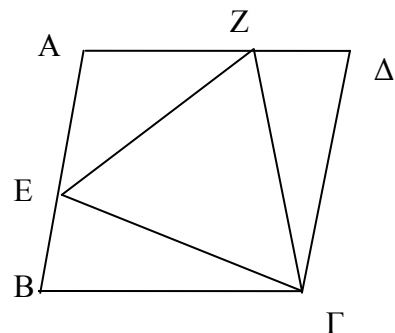
Ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει πλάτος $AB = x$ μέτρα και μήκος $BΓ = y$ μέτρα, το οποίο είναι διπλάσιο του πλάτους του. Αν αυξήσουμε το πλάτος του κατά 25%, να βρείτε πόσο επί τα εκατό πρέπει να ελαττώσουμε το μήκος του, ώστε το εμβαδόν του να μείνει αμετάβλητο.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος πλευράς a και το τρίγωνο ΓΕΖ είναι ισόπλευρο πλευράς a . Τα σημεία Ε και Ζ βρίσκονται πάνω στις πλευρές ΑΒ και ΑΔ, αντίστοιχα. Να βρείτε τις γωνίες του ρόμβου ΑΒΓΔ.

Μονάδες 5



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 23 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010

Γ' τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Έστω ο ακέραιος

$$A = \left[(-1)^{\nu} + (-1)^{2\nu} + (-1)^{3\nu} + (-1)^{4\nu} \right] \cdot \nu, \text{ όπου } \nu \text{ θετικός ακέραιος.}$$

Αν ο A είναι διαιρέτης του 24, να βρείτε τις δυνατές τιμές του ν .

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Υπάρχει διψήφιος θετικός ακέραιος $N = \overline{ab} = 10a + b$, όπου a, b ψηφία με $a \neq 0$, που ισούται με το γινόμενο των ψηφίων του ελαττωμένο κατά το άθροισμα των ψηφίων του;

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$S = 1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 + 5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2 + \dots + 997^2 - 998^2 - 999^2 + 1000^2.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

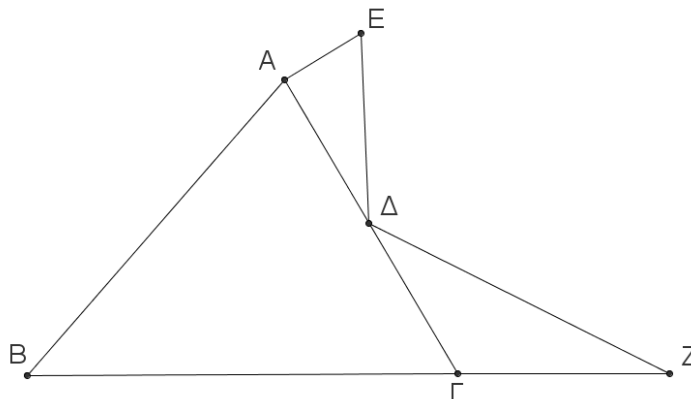
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ότι το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς $A\Gamma = \beta$ του τριγώνου $AB\Gamma$, $\hat{\Delta A E} = 90^\circ$, η ευθεία ΔE είναι κάθετη προς την ευθεία $B\Gamma$, $\hat{A \Delta E} = \hat{\Gamma \Delta Z} = \theta$ και $\hat{\Gamma \Delta Z} = 30^\circ$.

(i) Να βρείτε τη γωνία θ .

Μονάδες 1

(ii) Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος EZ συναρτήσει του β .

Μονάδες 4



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 23 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

(i) Να βρείτε τις τιμές του ρητού αριθμού α , για τις οποίες ο αριθμός $A = \alpha\sqrt{3}$ είναι ρητός.

Μονάδες 2

(ii) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B = (1 + \sqrt{3})^2$ είναι άρρητος.

Μονάδες 3

Πρόβλημα 2

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x + 1 - 2|x| = \alpha x,$$

έχει, για κάθε τιμή της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$, μία τουλάχιστον πραγματική λύση.

Για ποιες τιμές του α η εξίσωση έχει δύο διαφορετικές μεταξύ τους πραγματικές λύσεις;

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ABC εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O, R)$ και έστω A_1, B_1, C_1 τα αντιδιαμετρικά σημεία των κορυφών του A, B, C . Στις ευθείες που ορίζουν οι πλευρές BC, AC, AB θεωρούμε τα σημεία A_2, B_2, C_2 , αντίστοιχα, και έστω (ε_1) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία A_1, A_2 , (ε_2) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία B_1, B_2 και (ε_3) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία C_1, C_2 .

Έστω ακόμη (δ_1) η παράλληλη ευθεία που φέρουμε από το σημείο A προς την (ε_1) , (δ_2) η παράλληλη ευθεία που φέρουμε από το σημείο B προς την (ε_2) και (δ_3) η παράλληλη ευθεία που φέρουμε από το σημείο C προς την (ε_3) . Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ και (ε_3) συντρέχουν (δηλαδή, περνάνε από το ίδιο σημείο), αν, και μόνο αν, οι ευθείες $(\delta_1), (\delta_2)$ και (δ_3) συντρέχουν.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Οι πραγματικοί αριθμοί x, y και z ικανοποιούν τις ισότητες:

$$x^3 - y^3 = 26z^3$$

$$x^2y - xy^2 = 6z^3.$$

(α) Να εκφράσετε τους x, y συναρτήσει του z .

Μονάδες 3

(β) Αν επιπλέον ισχύει ότι $x + 2y + 3z = 8$, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y και z .

Μονάδες 2

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 23 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες (x, y, z) πραγματικών αριθμών που είναι λύσεις του συστήματος:

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 &= 65z^3 \\x^2y + xy^2 &= 20z^3 \\x - y + 2z &= 10.\end{aligned}$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Δίνεται οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο ABC , K τυχόν σημείο στο εσωτερικό του και τα ύψη του AH_1, BH_2, CH_3 . Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου AH_2H_3 τέμνει την ημιευθεία AK στο σημείο K_1 , ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου BH_1H_3 τέμνει την ημιευθεία BK στο σημείο K_2 και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου CH_1H_2 τέμνει τη ημιευθεία CK στο σημείο K_3 . Να αποδείξετε ότι τα σημεία K_1, K_2, K_3, H και K είναι ομοκυκλικά, δηλαδή ανήκουν στον ίδιο κύκλο, όπου H είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC .

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x^2 + x + 1 - 2|x| = \alpha x, \alpha \in \mathbb{R},$$

έχει, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, δύο διαφορετικές μεταξύ τους ρίζες στο σύνολο \mathbb{R} .
Για ποιες τιμές του α οι δύο ρίζες είναι ετερόσημες;

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$\sqrt{2x^2 + 3x + 2} - 2\sqrt{x^2 + x + 1} = x + 1.$$

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 23 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010

Γ' τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Η ακολουθία a_n , $n \in \mathbb{N}^*$, ορίζεται αναδρομικά από τις σχέσεις

$$a_{n+1} = a_n + kn, n \in \mathbb{N}^*,$$

όπου k θετικός ακέραιος και $a_1 = 1$. Να βρείτε για ποια τιμή του k ο αριθμός 2011 είναι όρος της ακολουθίας a_n , $n \in \mathbb{N}^*$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Δίνεται οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο ABC και έστω M_1, M_2, M_3 τυχόντα σημεία των πλευρών του BC, AC, AB αντίστοιχα. Έστω ακόμη τα ύψη του AH_1, BH_2, CH_3 . Να αποδείξετε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $AH_2H_3, BM_1H_3, CM_1H_2$ περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω K_1), οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $BH_1H_3, AM_2H_3, CM_2H_1$ περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω K_2) και οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $CH_1H_2, AM_3H_2, BM_3H_1$ περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω K_3). Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι οι ευθείες AK_1, BK_2, CK_3 συντρέχουν (δηλαδή, περνάνε από το ίδιο σημείο), αν, και μόνο αν, οι ευθείες AM_1, BM_2, CM_3 συντρέχουν.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Αν $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ με $(a, b) \neq (0, 0)$ και $(x, y) \neq (0, 0)$ και ισχύουν

$$a(x^2 - y^2) - 2bxy = x(a^2 - b^2) - 2aby$$

$$b(x^2 - y^2) + 2axy = y(a^2 - b^2) + 2abx,$$

να αποδείξετε ότι $x = a$ και $y = b$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Σημείο M βρίσκεται στο εσωτερικό κύκλου $C(O, r)$, όπου $r = 15\text{cm}$, σε απόσταση 9cm από το κέντρο του κύκλου. Να βρείτε τον αριθμό των χορδών του κύκλου $C(O, r)$ που περνάνε από το σημείο M και το μήκος τους είναι ακέραιος αριθμός.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ