ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Οι λύσεις είναι **ενδεικτικές** και όχι μοναδικές. Οποιαδήποτε μαθηματικώς σωστή λύση είναι αποδεκτή ανεξάρτητα από τα χρησιμοποιούμενα εργαλεία, π.χ. η Αναλυτική Γεωμετρία και ο Απειροστικός Λογισμός μπορούν να χρησιμοποιηθούν από μαθητές οποιασδήποτε τάξης.

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

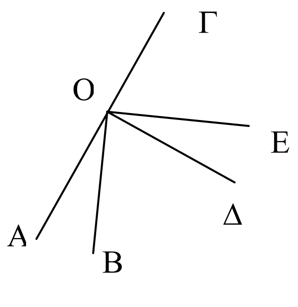
1. $\dfrac{42}{2\nu+1}\in\mathbb{Z}$ με $\nu\in\mathbb{N}\Rightarrow 2\nu+1\in\Delta_{42}=\{1,2,3,6,7,14,21,42\}$.

Επειδή ο $2\nu+1$ είναι περιττός έπεται ότι:

$$2\nu+1=1 \text{ ή } 2\nu+1=3 \text{ ή } 2\nu+1=7 \text{ ή } 2\nu+1=21$$
$$\Leftrightarrow \nu=0 \text{ ή } \nu=1 \text{ ή } \nu=3 \text{ ή } \nu=10.$$

2. Αν θέσουμε $\widehat{\mathrm{AOB}}=\omega$, τότε από την υπόθεση του προβλήματος έχουμε:

$$4\omega+90^\circ+\omega=180^\circ \Leftrightarrow 5\omega=90^\circ$$
$$\Leftrightarrow \omega=18^\circ$$



3. Από τις υποθέσεις έχουμε

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}+\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma-\delta}+\frac{\alpha-\beta}{\gamma+\delta}\Rightarrow\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}-\frac{\alpha-\beta}{\gamma+\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma-\delta}-\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}$$
$$\Rightarrow\frac{2\beta}{\gamma+\delta}=\frac{2\beta}{\gamma-\delta}\Rightarrow 2\beta\left(\gamma-\delta-\gamma-\delta\right)=0$$
$$\Rightarrow -2\beta\delta=0\Rightarrow\beta\delta=0\Rightarrow\beta=0 \text{ ή } \delta=0.$$

4. Έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\mathrm{N} = \overline{xyzxyz} &= 100000x + 10000y + 1000z + 100x + 10y + z \\
&= 100100x + 10010y + 1001z \\
&= 1001 \cdot (100x + 10y + z) \\
&= 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{xyz}.
\end{aligned}
$$

Άρα οι αριθμοί 7,11 και 13 διαιρούν τον αριθμό Ν.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Έχουμε

$$\mathrm{A} = (2 \cdot 5)^{90} \cdot 2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^2 = 10^{90} \cdot 4 \cdot 81 \cdot 49 = 15876 \cdot 10^{90}.$$

Άρα ο Α λήγει σε 90 μηδενικά και το τελευταίο μη μηδενικό ψηφίο του είναι το 6.

2. Έχουμε

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{6}{z} \Leftrightarrow 4x = 3y \text{ και } xz = 18 \Leftrightarrow y = \frac{4x}{3} \text{ και } xz = 18.$$

Επειδή οι αριθμοί x, z είναι φυσικοί έχουμε

$$xz = 18 \Leftrightarrow (x, z) = (1,18) \text{ ή } (2,9) \text{ ή } (3,6) \text{ ή } (6,3) \text{ ή } (9,2) \text{ ή } (18,1),$$

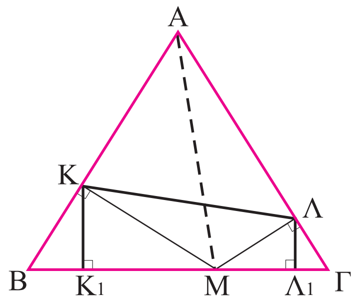
οπότε, από την ισότητα $y = \dfrac{4x}{3}$ προκύπτει ότι :

$$(x, y, z) = (3,4,6) \text{ ή } (6,8,3) \text{ ή } (9,12,2) \text{ ή } (18,24,1).$$

3. Έχουμε

$$(\mathrm{AB\Gamma}) = (\mathrm{ABM}) + (\mathrm{A\Gamma M}) \Leftrightarrow \frac{36\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \mathrm{MK} + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \mathrm{MK} \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{MK} + \mathrm{M\Lambda} = 3\sqrt{3} \quad (1)$$



Από τα ορθογώνια τρίγωνα $\mathrm{KK_1M}$ και $\mathrm{\Lambda\Lambda_1M}$ γεωμετρικά ή τριγωνομετρικά έχουμε

$$\mathrm{KK_1} = \frac{1}{2}\mathrm{MK}, \quad \mathrm{\Lambda\Lambda_1} = \frac{1}{2}\mathrm{M\Lambda} \text{ και}$$

$$\mathrm{MK_1} = \mathrm{MK}\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \mathrm{M\Lambda_1} = \mathrm{M\Lambda}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Οπότε } \mathrm{K_1\Lambda_1} = \mathrm{MK_1} + \mathrm{M\Lambda_1} = (\mathrm{MK} + \mathrm{M\Lambda})\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2}.$$

και $\mathrm{KK}_1 + \Lambda\Lambda_1 = \frac{1}{2}\left(MK + M\Lambda\right) = \frac{1}{2}3\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$

Άρα είναι $\left(\mathrm{KK}_1\Lambda\Lambda_1\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{KK}_1 + \Lambda\Lambda_1\right)\mathrm{K}_1\Lambda_1 = \frac{27\sqrt{3}}{8}$.

4. Αν υποθέσουμε ότι όλοι οι μαθητές έχουν διαφορετικό αριθμό τετραδίων, τότε ο ελάχιστος αριθμός τετραδίων που μπορούν να έχουν όλοι μαζί είναι

$$1 + 2 + \cdots + 15 = 120 > 115.$$

Άρα δεν είναι δυνατόν να έχουν όλοι οι μαθητές διαφορετικό αριθμό τετραδίων, οπότε δύο τουλάχιστον θα έχουν τον ίδιο αριθμό τετραδίων.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. (i) Λαμβάνοντας υπόψη τις ανισότητες $\alpha < \beta < \gamma < \delta < \varepsilon$ εύκολα βρίσκουμε ότι $\mathrm{K} = \gamma$, οπότε $\beta < \mathrm{K} < \delta$.

(ii) Έχουμε

$$x - y = (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) - (\alpha + \gamma)(\beta + \delta) = \alpha\gamma + \beta\delta - \alpha\beta - \gamma\delta$$
$$= \alpha(\gamma - \beta) + \delta(\beta - \gamma) = (\gamma - \beta)(\alpha - \delta) < 0.$$

Άρα είναι $x - y < 0$ δηλαδή $x < y$.

Ομοίως λαμβάνουμε $y - z = (\delta - \gamma)(\alpha - \beta) < 0$.

2. Επειδή είναι $\widehat{\mathrm{MB\Gamma}} = \widehat{\mathrm{M\Gamma B}}$, το τρίγωνο ΜΒΓ είναι ισοσκελές με

$$\mathrm{MB} = \mathrm{M\Gamma}. \qquad (1)$$

Επιπλέον, τα τρίγωνα ΜΑΔ και ΜΑΕ είναι ίσα γιατί έχουν:

ΑΜ κοινή πλευρά, ΑΔ = ΑΕ, $\widehat{\mathrm{MA\Delta}} = \widehat{\mathrm{MAE}}$.

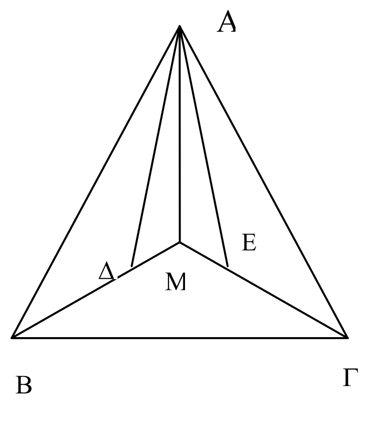
Άρα θα έχουν και

$$\widehat{\mathrm{AM\Delta}} = \widehat{\mathrm{AME}}. \qquad (2)$$

Λόγω των (1) και (2) τα τρίγωνα ΜΑΒ και ΜΑΓ είναι ίσα, οπότε θα έχουν και

$$\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma},$$

δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.



3. Επειδή είναι $x, y > 0$ έχουμε

$$x^3 + y^2 \le 64 \Rightarrow x^3 < 64 \text{ και } y^2 < 64 \Rightarrow x < 4 \text{ και } y < 8 \Rightarrow x^4 < 4x^3 \text{ και } y^3 < 8y^2,$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε

$$x^4 + y^3 < 4x^3 + 8y^2 < 8\left(x^3 + y^2\right) \le 8 \cdot 64 = 512.$$

4. Αν υποθέσουμε ότι παίρνουμε x κέρματα του ενός ευρώ, y χαρτονομίσματα των 10 ευρώ και z χαρτονομίσματα των 100 ευρώ, τότε θα έχουμε τις ισότητες

$$x + 10y + 100z = 50000 \quad \text{και} \quad x + y + z = 1000, \qquad (1)$$

από τις οποίες με αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$9y+99z=49000 \Rightarrow 9\cdot\left(y+11z\right)=49000 \Rightarrow 9\,|\,49000\,,$$

που είναι άτοπο, γιατί το άθροισμα των ψηφίων του 49000 είναι ο αριθμός 13 που δεν διαιρείται με το 9.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

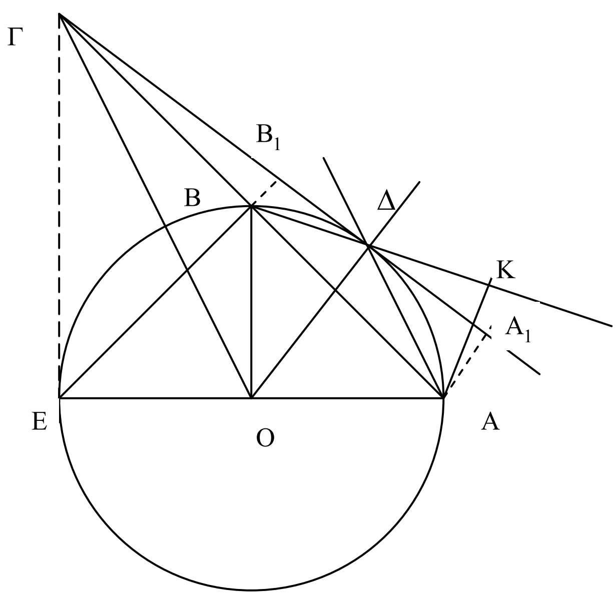
1. Από την υπόθεση έχουμε ότι:

$$\mathrm{P}\left(x\right)=\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right). \qquad (1)$$

Η παράσταση Κ γράφεται:

$$\begin{aligned}\mathrm{K}\left(x_1,x_2,x_3\right)&=\left(1-x_1\right)\left(1+x_1\right)\left(1-x_2\right)\left(1+x_2\right)\left(1-x_3\right)\left(1+x_3\right)\\&=\left(1-x_1\right)\left(1-x_2\right)\left(1-x_3\right)\left(1+x_1\right)\left(1+x_2\right)\left(1+x_3\right)\\&=\mathrm{P}\left(1\right)\left[-\left(-1-x_1\right)\left(-1-x_2\right)\left(-1-x_3\right)\right]\\&=-\mathrm{P}\left(1\right)\mathrm{P}\left(-1\right)=-\left(1+\kappa+\lambda\right)\left(-1-\kappa+\lambda\right)=\left(1+\kappa\right)^2-\lambda^2.\end{aligned}$$

2.



1ος Τρόπος

Έχουμε: $\Gamma\Delta^2=\Gamma\mathrm{A}\cdot\Gamma\mathrm{B}=2\mathrm{R}\sqrt{2}\cdot\mathrm{R}\sqrt{2}=4\mathrm{R}^2 \Rightarrow \Gamma\Delta=2\mathrm{R}=2\cdot\mathrm{O}\Delta.$

Επειδή επιπλέον $\mathrm{O}\hat{\Delta}\Gamma=90^{\mathrm{o}}$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\overset{\Delta}{\mathrm{O}\Gamma\Delta}\approx\overset{\Delta}{\mathrm{AKB}}$ ή ισοδύναμα αρκεί να αποδείξουμε ότι: $\mathrm{O}\hat{\Gamma}\Delta=\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}$.

Πράγματι αν Ε είναι το αντιδιαμετρικό σημείο του Α ως προς τον κύκλο Ο, τότε:

$$\begin{aligned}&\mathrm{OB}\parallel\mathrm{E}\Gamma \Rightarrow \mathrm{E}\Gamma\perp\mathrm{OE}\Rightarrow \mathrm{O}\Delta\Gamma\mathrm{E}\ \text{εγγεγραμμένο τετράπλευρο}\\&\Rightarrow \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{E}=\Delta\hat{\mathrm{O}}\mathrm{A}\Rightarrow 2\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{O}=2\cdot\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}\\&\Rightarrow \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{O}=\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}\end{aligned}$$

2ος Τρόπος

Έστω Ε το αντιδιαμετρικό σημείο του Α ως προς τον κύκλο κέντρου Ο

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΔΒΕ έπεται ότι $\widehat{\mathrm{K\Delta A}} = \widehat{\mathrm{AEB}} = 45^\circ$, οπότε και το τρίγωνο ΑΔΚ είναι ορθογώνιο ισοσκελές. Άρα είναι

$$\mathrm{KA} = \mathrm{K\Delta} = \frac{\mathrm{A\Delta}\sqrt{2}}{2}. \qquad (1)$$

Επιπλέον, αν είναι $\mathrm{AA_1} \perp \Gamma\Delta$, $\mathrm{BB_1} \perp \Gamma\Delta$ και $\mathrm{OA} = R$, τότε με χρήση του τύπου της απόστασης σημείου κύκλου από εφαπτομένη του, λαμβάνουμε

$$\left(\frac{\Delta\mathrm{A}}{\Delta\mathrm{B}}\right)^2 = \frac{\Delta\mathrm{A}^2/2R}{\Delta\mathrm{B}^2/2R} = \frac{\mathrm{AA_1}}{\mathrm{BB_1}} = \frac{\Gamma\mathrm{A}}{\Gamma\mathrm{B}} = 2. \qquad (2)$$

Από τη (2) έπεται ότι $\Delta\mathrm{B} = \frac{\mathrm{A\Delta}\sqrt{2}}{2}$, οπότε από την (1) έπεται ότι ΔΒ = ΚΔ = ΚΑ

και

$$\mathrm{KB} = \mathrm{K\Delta} + \Delta\mathrm{B} = 2\cdot\mathrm{KA}.$$

3. Από την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου έχουμε

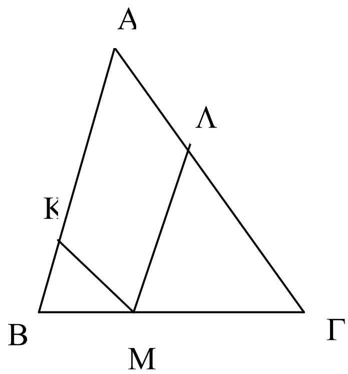
$$\frac{\alpha^4+\beta^4}{\alpha+\beta} = \frac{\overbrace{\alpha^3+\alpha^3+\cdots+\alpha^3}^{\alpha-\varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}+\overbrace{\beta^3+\beta^3+\cdots\beta^3}^{\beta-\varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}}{\alpha+\beta} \geq \sqrt[\alpha+\beta]{\left(\alpha^3\right)^\alpha\left(\beta^3\right)^\beta} = \sqrt[\alpha+\beta]{\left(\alpha^\alpha\beta^\beta\right)^3},$$

από την οποία έπεται το ζητούμενο.

4. Έστω ότι είναι $\mathrm{MB} = \kappa$ και $\mathrm{M\Gamma} = \lambda$, οπότε θα είναι $\kappa + \lambda = \alpha$.

Τότε θα έχουμε

$$\frac{x}{\kappa} = \frac{\beta}{\alpha} \text{ και } \frac{y}{\lambda} = \frac{\gamma}{\alpha} \Rightarrow x = \frac{\beta\kappa}{\alpha} \text{ και } y = \frac{\gamma\lambda}{\alpha}.$$



Άρα η παράσταση S γίνεται

$$S = x^2 + y^2 = \frac{\beta^2\kappa^2}{\alpha^2} + \frac{\gamma^2\lambda^2}{\alpha^2} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{\beta^2\kappa^2 + \gamma^2(\alpha-\kappa)^2}{\alpha^2}$$

$$= \left(\frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2}\right)\kappa^2 - \frac{2\gamma^2}{\alpha}\kappa + \gamma^2 = f(\kappa).$$

Άρα η παράσταση S είναι τριώνυμο ως προς κ με συντελεστή του κ^2 τον

$\frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2} > 0$, οπότε η παράσταση έχει ελάχιστο για $\kappa = -\frac{-2\gamma^2/\alpha}{2\left(\beta^2+\gamma^2\right)/\alpha^2} = \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}$.

Τότε είναι $\lambda = \alpha - \kappa = \frac{\alpha\beta^2}{\beta^2+\gamma^2}$, οπότε το σημείο Μ στο οπο0ίο λαμβάνεται το

ελάχιστο της παράστασης S χωρίζει την πλευρά ΒΓ σε λόγο $\frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{M\Gamma}} = \frac{\gamma^2}{\beta^2}$.

Η τιμή του ελάχιστου είναι

$$f\left(\frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}\right)=\left(\frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2}\right)\left(\frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}\right)^2-\frac{2\gamma^2}{\alpha}\cdot\left(\frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}\right)+\gamma^2=\frac{\beta^2\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}.$$

2^{ος} τρόπος

Μέσω της σχέσης (1) θα μπορούσαμε να προχωρήσουμε ως εξής:

$$S\cdot\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\alpha^2}{\gamma^2}\right)=\left(\frac{\beta^2\kappa^2}{\alpha^2}+\frac{\gamma^2\lambda^2}{\alpha^2}\right)\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)\geq(\kappa+\lambda)^2=\alpha^2\Rightarrow S\geq\frac{\beta^2\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}$$

οπότε έχουμε: $S\min=\frac{\beta^2\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}$.

Η ισότητα ισχύει όταν $\frac{\frac{\beta\kappa}{\alpha}}{\frac{\alpha}{\beta}}=\frac{\frac{\gamma\lambda}{\alpha}}{\frac{\alpha}{\gamma}}$ ή $\frac{\kappa}{\lambda}=\frac{\gamma^2}{\beta^2}$, δηλαδή όταν το σημείο Μ χωρίζει τη ΒΓ σε λόγο $\frac{\gamma^2}{\beta^2}$.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. $150^x=2,\ 150^y=3$

$$A=\left(\frac{150}{3}\right)^{\frac{1-x-y}{2(1-y)}}=\left(\frac{150}{150^y}\right)^{\frac{1-x-y}{2(1-y)}}=\left(150^{1-y}\right)^{\frac{1-x-y}{2(1-y)}}=150^{\frac{1-x-y}{2}}$$

$$=\left(150^{1-y}\right)^{\frac{1-x-y}{2(1-y)}}=150^{\frac{1-x-y}{2}}=\sqrt{150^{1-x-y}}=\sqrt{\frac{150}{150^{x+y}}}=\sqrt{\frac{150}{150^x\cdot150^y}}=$$

$$=\sqrt{\frac{150}{2\cdot3}}=\sqrt{25}=5.$$

2^{ος} τρόπος

$$\log_{150}A=\frac{1-x-y}{2(1-y)}=\log_{150}50=\frac{\log_{150}\left(\frac{150}{6}\right)}{2\log_{150}\left(\frac{150}{3}\right)}\log_{150}50=\frac{1}{2}\log_{150}25=\log_{150}5.$$

Άρα Α=5.

2. Από την υπόθεση έχουμε ότι:

$$P(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).\qquad(1)$$

Η παράσταση Κ γράφεται:

$$\begin{aligned}K(x_1,x_2,x_3)&=(i-x_1)(-i-x_1)(i-x_2)(-i-x_2)(i-x_3)(-i-x_3)\\&=(i-x_1)(i-x_2)(i-x_3)(-i-x_1)(-i-x_2)(-i-x_3)\\&=P(1)P(-1)=(-i+\kappa i+\lambda)(i-\kappa i+\lambda)=\lambda^2+(\kappa-1)^2.\end{aligned}$$

3. Η συνάρτηση $h\left(x\right)=\frac{2x^2+1}{3}$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα αντιστρέφεται και

$$h^{-1}\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt[3]{\frac{3x-1}{2}}, & x\geq\frac{1}{3}\\ -\sqrt[3]{\frac{1-3x}{2}}, & x<\frac{1}{3}\end{cases}$$

Άρα $\left(1\right)\Leftrightarrow h^{-1}\left(x\right)=h\left(x\right)$ με $x\geq\frac{1}{3}$.

Αφού f γνησίως αύξουσα, τα κοινά σημεία των $G_{h^{-1}}$, G_h θα βρίσκονται στη πρώτη διχοτόμο y=x.

Έχουμε: $\left.\begin{array}{l} y=h\left(x\right)\\ y=x\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l} y=\frac{2x^3+1}{3}\\ y=x\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l} x=\frac{2x^3+1}{3}\\ y=x\end{array}\right\}\Leftrightarrow$

$\left.\begin{array}{l} 2x^3-3x+1=0\\ y=x\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l} x\in\left\{1,\frac{\sqrt{3}-1}{2},-\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right\}\\ y=x\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l} x\in\left\{1,\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right\}\\ y=x\end{array}\right\}$ αφού $x\geq\frac{1}{3}$.

Άρα $\left(1\right)\Leftrightarrow x\in\left\{1,\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right\}$.

2ος τρόπος

$\left.\begin{array}{l} y=h\left(x\right)\\ y=h^{-1}\left(x\right)\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l} y=h\left(x\right)\\ x=h\left(y\right)\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l} y=\frac{2x^3+1}{3}\\ x=\frac{2y^3+1}{3}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l} y=\frac{2x^3+1}{3}\\ x-y=\frac{2}{3}\left(y^3-x^3\right)\end{array}\right\}\begin{array}{l}(2)\\ (3)\end{array}$

$\left(3\right)\Leftrightarrow x=y$ ή $2x^2+2yx+2y^2+3=0$ $\quad\left(4\right)\Leftrightarrow x=y$ αφού η $\left(4\right)$ έχει $\Delta=-\left(12y^2+24\right)<0,\ \forall y\in\mathbb{R}$ κ.λπ.

4. Θεωρούμε τον περιγεγραμένο κύκλο $C_1\left(K,R\right)$ του $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ και τον συμμετρικό του $C_2\left(\Lambda,R\right)$ ως προς τη ΒΓ. Τότε το Λ θα είναι μέσο του μικρού τόξου ΒΓ.

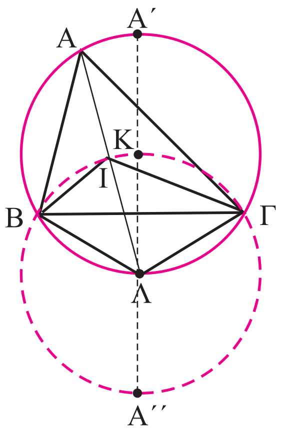
Έστω A' το αντιδιαμετρικό του Α στον C_1 και A'' το αντιδιαμετρικό του Κ στον C_2.

Το τρίγωνο $BA''\Gamma$ είναι ισόπλευρο οπότε $IA''=IB+I\Gamma$. Επίσης $B\hat{I}\Gamma=B\hat{K}\Gamma=120^o$.

Επομένως $IA+IB+I\Gamma=IA+IA''$.

Αλλά $IA''\leq KA''=2R$ (R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου) και $IA=A\Lambda-R<A'\Lambda-R=KA'=R$.

Άρα $IA+IB+I\Gamma\leq 3R=3\frac{2\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$, αφού ΒΓ=2 $\Rightarrow R=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.



2ος τρόπος

Έστω ΙΑ=x, ΙΒ=y, ΙΓ=ω

Τότε $\frac{\hat{A}}{2}=30^o \Rightarrow x=2\rho$

$B\hat{I}\Gamma=120^o \Rightarrow y^2+\omega^2+y\omega=4 \Rightarrow (y+\omega)^2-y\omega=4 \Rightarrow (y+\omega)^2=4+y\omega \Rightarrow$

$y+\omega=\sqrt{4+y\omega}=\sqrt{4+\lambda}$ με λ=yω.

Εξάλλου $(IB\Gamma)=\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot 2=\rho$

$(IB\Gamma)=\frac{1}{2}y\omega\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\lambda\sqrt{3}}{4}$, οπότε $\rho=\frac{\lambda\sqrt{3}}{4}$.

Αρκεί λοιπόν $\frac{\lambda\sqrt{3}}{2}+\sqrt{4+\lambda}\le 2\sqrt{3}$, ή $\lambda\sqrt{3}+2\sqrt{4+\lambda}\le 4\sqrt{3}$.

Όμως $R\sqrt{3}=2 \Rightarrow R=\frac{2}{\sqrt{3}}$ και $R>\rho \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}}>\frac{2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow 8>3\lambda \Rightarrow \frac{8}{3}>\lambda \Rightarrow 4>\frac{8}{3}>\lambda$.

Οπότε αρκεί $2\sqrt{4+\lambda}\le\sqrt{3}(4-\lambda)$, ή $4(4+\lambda)\le 2(4-\lambda)^2$, ή $3\lambda^2-28\lambda+32\ge 0$

που ισχύει αφού Δ=–188.