



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
35<sup>η</sup> Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"  
3 Μαρτίου 2018

Θέματα μικρών τάξεων

Ενδεικτικές λύσεις

**Πρόβλημα 1**

- (α) Να εξετάσετε, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός  $x$ , τέτοιος ώστε οι αριθμοί  $x + \sqrt{3}$  και  $x^2 + \sqrt{3}$  να είναι και οι δύο ρητοί.  
(β) Να εξετάσετε, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός  $y$  τέτοιος ώστε οι αριθμοί  $y + \sqrt{3}$  και  $y^3 + \sqrt{3}$  να είναι και οι δύο ρητοί.

**Λύση**

- (α) Έστω  $x + \sqrt{3} = q$ ,  $x^2 + \sqrt{3} = p$  με  $p, q \in \mathbb{Q}$ . Τότε

$$x = q - \sqrt{3} \Rightarrow x^2 = q^2 - 2q\sqrt{3} + 3$$

οπότε αν αντικαταστήσουμε στη δεύτερη παίρνουμε:

$$(q^2 - 2q\sqrt{3} + 3) + \sqrt{3} = p \Leftrightarrow -\sqrt{3}(2q - 1) = p - q^2 - 3$$

Τότε πρέπει  $2q - 1 = 0 \Leftrightarrow q = \frac{1}{2}$ . Σε αυτή την περίπτωση  $p = q^2 + 3 \Rightarrow q = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4}$

και  $x = \frac{1}{2} - \sqrt{3}$ .

- (β) Έστω  $y + \sqrt{3} = q$ ,  $y^3 + \sqrt{3} = p$  με  $p, q \in \mathbb{Q}$ . Τότε

$$y = q - \sqrt{3} \Rightarrow y^3 = q^3 - 3q^2\sqrt{3} + 9q - 3\sqrt{3}$$

οπότε αν αντικαταστήσουμε στη δεύτερη παίρνουμε:

$$(q^3 - 3q^2\sqrt{3} + 9q - 3\sqrt{3}) + \sqrt{3} = p \Leftrightarrow -\sqrt{3}(3q^2 + 2) = p - q^3 - 9q \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{3} = \frac{q^3 + 9q - p}{3q^2 + 2} \in \mathbb{Q}$$

που είναι άτοπο.

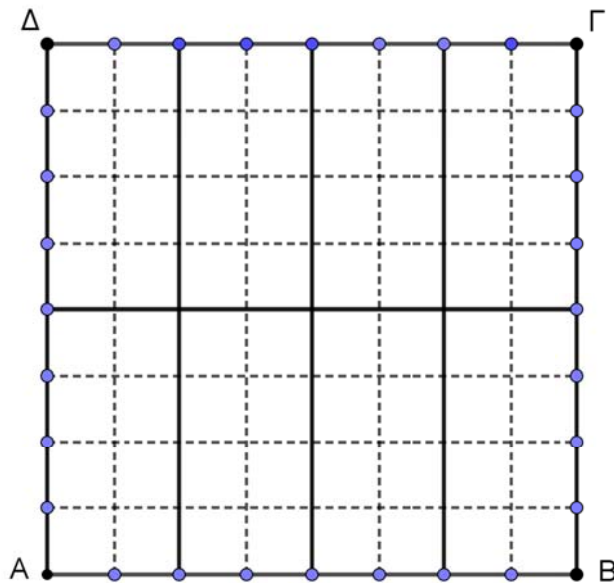
**Πρόβλημα 2**

Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 8 cm το οποίο υποδιαιρούμε με ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές του σε 64 μικρά τετράγωνα πλευράς 1cm. Χρωματίζουμε 7 μικρά τετράγωνα μαύρα, ενώ όλα τα υπόλοιπα 57 μικρά τετράγωνα είναι λευκά. Υποθέτουμε ότι υπάρχει θετικός ακέραιος  $k$  τέτοιος ώστε ανεξάρτητα από τη θέση των 7 μαύρων μικρών τετραγώνων, υπάρχει ορθογώνιο εμβαδού  $k \text{ cm}^2$  με πλευρές παράλληλες στις πλευρές του ΑΒΓΔ και με όλα τα μικρά τετράγωνα από τα οποία

αποτελείται να είναι λευκά, που μπορεί να αποκοπεί από το τετράγωνο ΑΒΓΔ. Να βρεθεί η μέγιστη δυνατή τιμή του  $k$ .

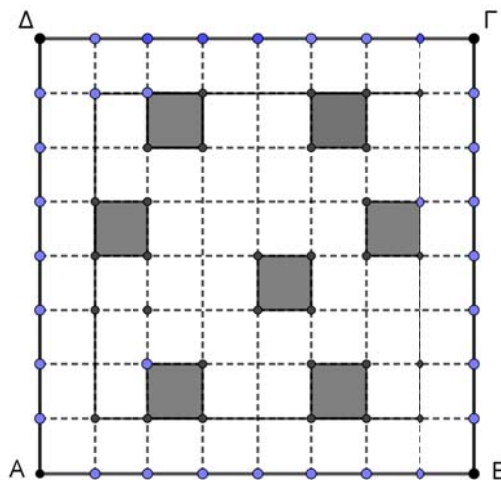
**Λύση**

Μπορούμε να χωρίσουμε το τετράγωνο ΑΒΓΔ σε 8 ορθογώνια  $4 \times 2$ . Έτσι μπορούμε να χρωματίσουμε στα επτά  $4 \times 2$  ορθογώνια από ένα μαύρο μικρό τετράγωνο, οπότε από την αρχή του Περιστερώνα θα μείνει με λευκά μικρά τετράγωνα τουλάχιστον ένα  $4 \times 2$  ορθογώνιο εμβαδού  $8 \text{ cm}^2$ .



Σχήμα 1

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι υπάρχει χρωματισμός των 7 μικρών τετραγώνων έτσι ώστε να μην υπάρχει ορθογώνιο με λευκά τετράγωνα εμβαδού μεγαλύτερου των  $8 \text{ cm}^2$ . Στο τετράγωνο του παρακάτω σχήματος 2 αφήνουμε όλα τα συνοριακά μικρά τετράγωνα λευκά και στο  $6 \times 6$  εσωτερικό τετράγωνο χρωματίζουμε 7 μικρά τετράγωνα μαύρα, έτσι ώστε να μην υπάρχει ορθογώνιο με λευκά τετράγωνα εμβαδού μεγαλύτερου των  $8 \text{ cm}^2$ .



Σχήμα 2

**Σημείωση:** Για το πρώτο κομμάτι της άσκησης μπορούμε να θεωρήσουμε τις 8 γραμμές ή τις 8 στήλες του πίνακα και να κάνουμε το επιχειρήμα όπως στην παραπάνω λύση με την αρχή του Περιστερώνα.

### Πρόβλημα 3

Θεωρούμε τους θετικούς ακεραίους  $a, b$  τέτοιους ώστε ο αριθμός

$$\frac{(a+b)^2 + 4a}{ab}$$

να είναι ακέραιος. Να αποδείξετε ότι αν ο  $b$  είναι περιττός, τότε ο  $a$  είναι τέλειο τετράγωνο.

#### Λύση

Έστω  $\frac{(a+b)^2 + 4a}{ab} = \kappa \in \mathbb{Z}$ . Η τελευταία γράφεται ως

$$(a+b)^2 + 4a = \kappa ab \quad (1)$$

Θα δείξουμε ότι ο  $a$  είναι περιττός. (2) Πράγματι, αν  $2 \mid a$ , τότε θα πρέπει  $2 \mid (a+b)^2$ , τότε θα πρέπει και ο  $b$  να είναι άρτιος, άτοπο. Θεωρούμε τώρα την (1) σαν δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς  $b$ , στη μορφή:

$$b^2 + b(2 - \kappa)a + a^2 + 4a = 0$$

Για να έχει αυτή ακέραιες λύσεις, η διακρίνουσά της θα πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο. Έχουμε ότι  $\Delta = a^2(\kappa - 2)^2 - 4(a^2 + 4a) = a(a(\kappa - 2)^2 - 4a - 16)$ . Επομένως το γινόμενο των  $a, a(\kappa - 2)^2 - 4a - 16$  είναι τέλειο τετράγωνο. Επειδή όμως ο  $a$  είναι περιττός είναι πρώτοι μεταξύ τους, οπότε ο καθένας τους θα πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο, άρα ο  $a$  είναι τέλειο τετράγωνο.

#### 2<sup>ος</sup> τρόπος:

Έστω  $d = (a, b)$  και γράφουμε  $a = dx, b = dy$ , με  $(x, y) = 1$ . Παρατηρούμε ότι επειδή  $d \mid b$  και ο  $b$  είναι περιττός, θα πρέπει  $d$  περιττός. Τότε ο αριθμός

$$\frac{(a+b)^2 + 4a}{ab} = \frac{d^2(x+y)^2 + 4dx}{d^2xy} = \frac{d(x+y)^2 + 4x}{dxy}$$

είναι ακέραιος. Άρα  $x \mid d(x+y)^2 + 4x \Rightarrow x \mid dy^2$  και επειδή  $(x, y) = 1$ , πρέπει  $x \mid d$ .

Επίσης,  $d \mid d(x+y)^2 + 4x \Rightarrow d \mid 4x$  και αφού  $d$  περιττός,  $d \mid x$ . Από τις δύο αυτές σχέσεις έχουμε  $d = x$ , άρα  $a = d^2$ .

### Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma < B\Gamma$  εγγεγραμμένο σε κύκλο  $c$  με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $R$ . Ονομάζουμε  $\Delta$  το αντιδιαμετρικό της κορυφής  $A$ . Δίνεται επίσης ο κύκλος  $c_1$  του οποίου το κέντρο  $K$  βρίσκεται επάνω στο τμήμα  $B\Delta$  και περνάει από τα σημεία  $B$  και  $\Gamma$ . Αν ο κύκλος  $c_1$  τέμνει την  $A\Gamma$  στο σημείο  $E$ , να αποδείξετε

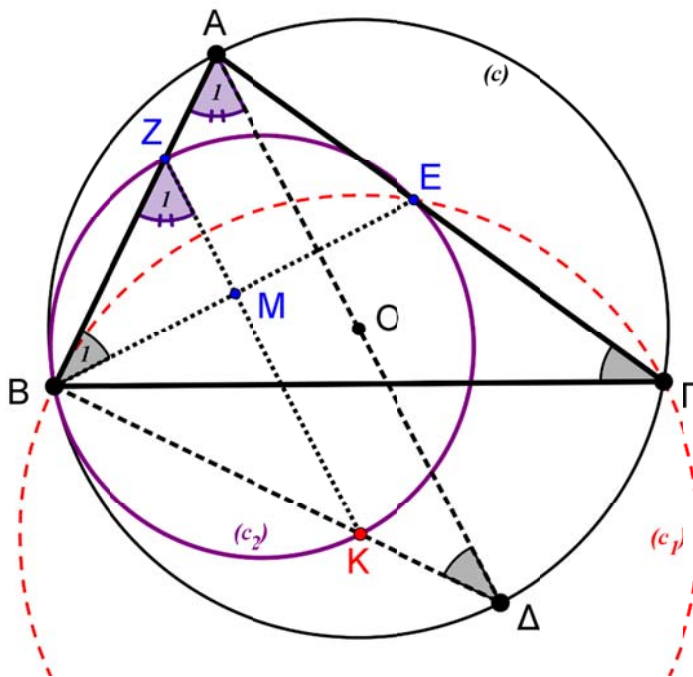
ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου  $BKE$ , έστω  $c_2$ , εφάπτεται του περιγεγραμμένου κύκλου  $c$ .

**Λύση (1<sup>ος</sup> Τρόπος)**

Έστω  $Z$  η τομή του κύκλου  $c_2$  με την  $AB$  και  $M$  η τομή της  $KZ$  με την  $BE$ . Η γωνία  $\hat{A}B\Delta$  (άρα και η γωνία  $\hat{Z}BK$ ) είναι ορθή διότι βαίνει στη διάμετρο  $AD$  του περιγεγραμμένου κύκλου  $c(O, R)$ .

Εφόσον  $\hat{ZBK} = 90^\circ$ , η  $ZK$  είναι διάμετρος του κύκλου  $c_2$  και κατά συνέπεια η  $ZK$  θα είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής  $BE$  των κύκλων  $c_1$  και  $c_2$ . Η  $AB$  εφάπτεται στον κύκλο  $c_1$ , άρα  $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}$ . Από το ορθογώνιο τρίγωνο  $BMZ$  έχουμε:

$$\hat{Z}_1 = 90^\circ - \hat{B}_1 = 90^\circ - \hat{\Gamma} \quad (1)$$



Σχήμα 3

Οι γωνίες  $\hat{\Delta}, \hat{\Gamma}$  είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο  $c$  και βαίνουν στο ίδιο τόξο, άρα  $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ . Από το ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Delta$ , έχουμε:  $\hat{A}_1 = 90^\circ - \hat{\Delta} = 90^\circ - \hat{\Gamma}$  (2).

Από τις ισότητες γωνιών (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι:  $\hat{A}_1 = \hat{Z}_1$ , οπότε τα ευθύγραμμα τμήματα  $A\Delta$  και  $KZ$  είναι παράλληλα και κατά συνέπεια το

τετράπλευρο  $A\Delta KZ$  είναι τραπέζιο. Εφόσον το  $O$  είναι το μέσο της  $A\Delta$ , συμπεραίνουμε ότι η  $OB$  θα διέρχεται από το μέσο της  $KZ$  που είναι το κέντρο του κύκλου  $c_2$ . Άρα τα κέντρα των κύκλων  $c$ ,  $c_2$  και το σημείο  $B$  θα είναι συνευθειακά.

**Εναλλακτικά, το τελικό συμπέρασμα (που διατυπώνεται στην τελευταία παράγραφο) θα μπορούσε να προκύψει και με τη βοήθεια του μετασχηματισμού της ομοιοθεσίας:**

Από τις ισότητες γωνιών (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι:  $\hat{A}_1 = \hat{Z}_1$ , οπότε τα ευθύγραμμα τμήματα  $A\Delta$  και  $KZ$  είναι παράλληλα και κατά συνέπεια ομοιόθετα στην ομοιοθεσία με κέντρο ομοιοθεσίας το σημείο  $B$ .

Εφόσον τα τμήματα  $A\Delta$  και  $KZ$  (δηλαδή, οι διάμετροι των κύκλων  $c$  και  $c_2$ ) είναι ομοιόθετα με κέντρο ομοιοθεσίας το  $B$  και οι κύκλοι  $c$  και  $c_2$  θα είναι ομοιόθετοι με το ίδιο κέντρο ομοιοθεσίας. Δηλαδή τα κέντρα των κύκλων  $c$ ,  $c_2$  και το σημείο  $B$  θα είναι συνευθειακά.

### 2<sup>ος</sup> τρόπος

Θα αποδείξουμε ότι ο  $c_2$  εφάπτεται του κύκλου  $c(O, R)$  στο σημείο  $B$ . Για το σκοπό αυτό θα δείξουμε ότι οι δύο αυτοί κύκλοι έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο  $B$ . Έστω  $BP$  η εφαπτομένη του  $c(O, R)$  στο σημείο  $B$  και ονομάζουμε  $\widehat{KBP} = \omega$ . Για να δείξουμε ότι η  $BP$  είναι εφαπτομένη του  $c_2$  στο  $B$ , αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\widehat{BEK} = \omega. \quad (1)$$

Επειδή η  $BP$  η εφαπτομένη του  $c(O, R)$ , έχουμε ότι  $\widehat{\Delta\Gamma B} = \omega$ . Επιπλέον η  $A\Delta$  είναι διάμετρος, οπότε  $\widehat{A\Gamma\Delta} = 90^\circ$ , οπότε  $\widehat{E\Gamma B} = 90^\circ - \omega$ . Όμως

$$\widehat{BKE} = 2\widehat{B\Gamma E} = 2(90^\circ - \omega) = 180^\circ - 2\omega, \quad (2)$$

από τη σχέση επίκεντρης εγγεγραμμένης στον  $c_1$ . Όμως το τρίγωνο  $BKE$  είναι ισοσκελές επομένως λόγω της (2) θα είναι  $\widehat{KBE} = \widehat{KEB} = \omega$ , οπότε η (1) ισχύει και έχουμε το ζητούμενο.

