



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
33^η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
27 Φεβρουαρίου 2016

Θέματα μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1

Οι θετικοί ακέραιοι p, q και r είναι πρώτοι και έχουν γινόμενο ίσο με n . Αν αυξήσουμε καθέναν από τους p, q κατά 1, τότε το γινόμενο $(p+1)(q+1)r$ είναι ίσο με $n+138$. Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του n .

Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση, έχουμε:

$$\left\{ \begin{array}{l} pqr = n \\ (p+1)(q+1)r = n+138 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} pqr = n \\ pqr + (p+q)r + r = n+138 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} pqr = n \\ (p+q+1)r = 138 \end{array} \right\}.$$

Από την εξίσωση

$$(p+q+1)r = 138 = 2 \cdot 3 \cdot 23 \quad (1)$$

θα προσδιορίσουμε τις δυνατές τιμές των p, q, r και στη συνέχεια από την εξίσωση $pqr = n$ θα βρούμε τις δυνατές τιμές του n .

Επειδή οι θετικοί ακέραιοι p, q, r είναι πρώτοι, οι δυνατές τιμές του r είναι 2 ή 3 ή 23, οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $r=2$, τότε $p+q+1=69 \Leftrightarrow p+q=68$, από την οποία, αφού p, q πρώτοι, προκύπτουν τα ζεύγη:

$$(p, q) = (7, 61), (p, q) = (61, 7), (p, q) = (31, 37), (p, q) = (37, 31).$$

Επομένως για το αρχικό γινόμενο προκύπτουν οι τιμές:

$$n = 7 \cdot 61 \cdot 2 = \mathbf{854} \quad \text{ή} \quad n = 31 \cdot 37 \cdot 2 = \mathbf{2294}.$$

- Αν $r=3$, τότε προκύπτει η εξίσωση $p+q+1=46 \Leftrightarrow p+q=45$, από την οποία, αφού p, q πρώτοι, προκύπτουν τα ζεύγη:

$$(p, q) = (2, 43), (p, q) = (43, 2) \text{ και η τιμή } n = 2 \cdot 43 \cdot 3 = \mathbf{258}.$$

- Αν $r=23$, τότε $p+q+1=6 \Leftrightarrow p+q=5 \Leftrightarrow (p, q) = (2, 3)$ ή $(p, q) = (3, 2)$, οπότε θα είναι $n = 2 \cdot 3 \cdot 23 = \mathbf{138}$.

Επομένως οι δυνατές τιμές του n είναι οι: **138, 258, 854** και **2294**.

Πρόβλημα 2

Οι πραγματικοί αριθμοί x, y, z , με $x \neq z$, είναι διαφορετικοί από το 0 και ικανοποιούν τις ισότητες

$$(x+y)^2 + (2-xy) = 9,$$

$$(y+z)^2 - (3+yz) = 4.$$

Να προσδιορίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\frac{x}{y} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{z^3}{x^2 y} \right) \left(\frac{y}{z} + \frac{z^2}{y^2} + \frac{x^3}{y^2 z} \right) \left(\frac{z}{x} + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^3}{z^2 x} \right).$$

Λύση

Οι δεδομένες σχέσεις γίνονται:

$$x^2 + y^2 + xy = 7, \quad (1)$$

$$y^2 + z^2 + yz = 7, \quad (2)$$

από τις οποίες με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει:

$$x^2 - z^2 + xy - yz = 0 \Leftrightarrow (x-z)(x+z) + y(x-z) = 0 \Leftrightarrow (x-z)(x+z+y) = 0.$$

Από την τελευταία ισότητα, επειδή είναι από την υπόθεση $x-z \neq 0$, έπεται ότι:

$$x + y + z = 0. \quad (3)$$

Θεωρούμε τώρα καθέναν χωριστά τους παράγοντες της παράστασης A . Έχουμε

$$\frac{x}{y} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{z^3}{x^2 y} = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{x^2 y}, \quad \frac{y}{z} + \frac{z^2}{y^2} + \frac{x^3}{y^2 z} = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{y^2 z},$$

$$\frac{z}{x} + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^3}{z^2 x} = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{z^2 x}, \quad \text{οπότε η παράσταση γίνεται:}$$

$$A = \frac{(x^3 + y^3 + z^3)^3}{(xyz)^3}. \quad (4)$$

Από τη σχέση (3) λαμβάνουμε: $z = -x - y$, οπότε

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= x^3 + y^3 + (-x-y)^3 = x^3 + y^3 - (x+y)^3 \\ &= -3xy(x+y) = -3xy(-z) = 3xyz. \end{aligned} \quad (5)$$

Η σχέση (5) προκύπτει άμεσα και από την ταυτότητα του Euler.

Επομένως, από τη σχέση (4) λαμβάνουμε

$$A = \frac{(x^3 + y^3 + z^3)^3}{(xyz)^3} = \frac{(3xyz)^3}{(xyz)^3} = 27.$$

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($A\Delta \parallel B\Gamma$) με $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$ και $A\Delta < B\Gamma$. Ονομάζουμε E το σημείο τομής των μη παράλληλων πλευρών AB και $\Gamma\Delta$, Z το συμμετρικό του A ως προς την ευθεία $B\Gamma$ και M το μέσον της EZ . Αν δίνεται ότι η ευθεία ΓM είναι κάθετη στην ευθεία ΔZ , να αποδείξετε ότι η ευθεία $Z\Gamma$ είναι κάθετη στην ευθεία $E\Gamma$.

Λύση

Έστω ότι η ΔZ τέμνει τις $\Gamma M, B\Gamma$ στα K, N αντίστοιχα. Τότε στο τρίγωνο $\Delta\Delta Z$, έχουμε ότι B μέσον του AZ και $BN \parallel \Delta\Delta$, οπότε έχουμε ότι N μέσον του $Z\Delta$.

Επομένως στο τρίγωνο $Z\Delta\Delta$ η MN συνδέει τα μέσα δύο πλευρών, οπότε:

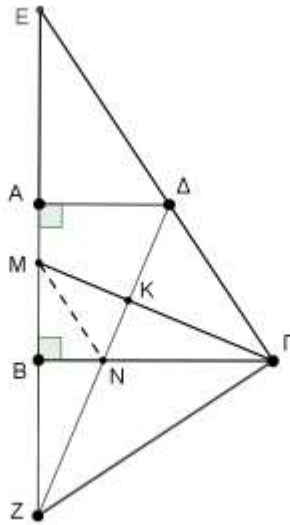
$$MN \parallel \Delta\Delta \quad (1)$$

Επιπλέον στο τρίγωνο $M\Gamma Z$, τα $\Gamma B, ZK$ είναι ύψη, άρα το σημείο N είναι το ορθόκентρο του τριγώνου, οπότε:

$$MN \perp Z\Gamma$$

(2).

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι $Z\Gamma \perp E\Gamma$, που είναι το ζητούμενο.



Σχήμα 1

Πρόβλημα 4.

Να υπολογίσετε το πλήθος των διατεταγμένων εξάδων $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$ που μπορούν να δημιουργηθούν, αν οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ μπορούν να πάρουν τις τιμές 0,1 και 2 και το άθροισμα $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$ είναι άρτιος.

Λύση

Το άθροισμα $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$ είναι άρτιος, αν και μόνο αν το πλήθος των 1 είναι άρτιο, δηλαδή 0,2, 4,6.

Αν δεν έχουμε καθόλου 1, οι δυνατές επιλογές είναι 2^6 , αφού για καθέναν από τους a_i έχουμε δύο επιλογές (0 ή 2)

Αν έχουμε δύο 1, τότε τη θέση τους μπορούμε να την επιλέξουμε με $\binom{6}{2}$ τρόπους και στις

υπόλοιπες 4 θέσεις έχουμε 2^4 επιλογές. Δηλαδή συνολικά έχουμε $2^4 \cdot \binom{6}{2}$ δυνατές εξάδες.

Αν έχουμε τέσσερα 1, τότε τη θέση τους μπορούμε να την επιλέξουμε με $\binom{6}{4}$ τρόπους και

στις υπόλοιπες 2 θέσεις έχουμε 2^2 επιλογές. Δηλαδή συνολικά έχουμε $2^2 \cdot \binom{6}{4}$ δυνατές

εξάδες. Αν έχουμε έξι 1, τότε είναι φανερό ότι έχουμε έναν τρόπο.

Επομένως, συνολικά έχουμε: $2^6 + 2^4 \cdot \binom{6}{2} + 2^2 \cdot \binom{6}{4} + 1 = 64 + 16 \cdot 15 + 4 \cdot 15 + 1 = 365$ εξάδες.