ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
32η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
28 Φεβρουαρίου 2015
Θέματα μικρών τάξεων

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ (*εκτός από αυτές τις λύσεις κάθε άλλη τεκμηριωμένη λύση, είναι αποδεκτή*)

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση

$$x^2+(\alpha-2)x-(\alpha-1)(2\alpha-3)=0$$

έχει δύο ρίζες, τέτοιες ώστε η μία να ισούται με το τετράγωνο της άλλης.

Λύση

Έχουμε $\Delta=(\alpha-2)^2+4(\alpha-1)(2\alpha-3)=9\alpha^2-24\alpha+16=(3\alpha-4)^2$, οπότε η εξίσωση έχει τις ρίζες

$$x_{1,2}=\frac{2-\alpha\pm(3\alpha-4)}{2}\Leftrightarrow x_1=\alpha-1,\ x_2=-2\alpha+3.$$

Επομένως ζητάμε τις τιμές του α για τις οποίες ισχύει:

$$x_1=x_2^2 \text{ ή } x_2=x_1^2 \Leftrightarrow \alpha-1=(-2\alpha+3)^2 \text{ ή } -2\alpha+3=(\alpha-1)^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha-1=4\alpha^2-12\alpha+9 \quad \text{ή} \quad -2\alpha+3=\alpha^2-2\alpha+1$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha^2-13\alpha+10=0 \text{ ή } \alpha^2=2 \Leftrightarrow \alpha=2 \text{ ή } \alpha=\frac{5}{4} \text{ ή } \alpha=\sqrt{2} \text{ ή } \alpha=-\sqrt{2}.$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη μη αρνητικών ακέραιων (m,n) με $m\geq n$, που είναι τέτοια ώστε ο αριθμός $\mathrm{A}=(m+n)^3$ να διαιρεί τον αριθμό $\mathrm{B}=2n\left(3m^2+n^2\right)+8$.

.

Λύση

Έστω $\mathrm{A}=(m+n)^3, \mathrm{B}=2n\left(3m^2+n^2\right)+8$. Επειδή $(m+n)^3 \mid 2n\left(3m^2+n^2\right)+8$ πρέπει να είναι:

$$(m+n)^3\leq 2n\left(3m^2+n^2\right)+8 \Leftrightarrow m^3+3m^2n+3mn^2+n^3\leq 6m^2n+2n^3+8$$

$$\Leftrightarrow m^3-3m^2n+3mn^2-n^3\leq 8 \Leftrightarrow (m-n)^3\leq 8 \overset{m\geq n}{\Longleftrightarrow} m-n\leq 2 \Leftrightarrow m-n\in\{0,1,2\}.$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $m-n=0\Leftrightarrow m=n.$ Τότε $\mathrm{A}=8m^3, \mathrm{B}=8m^3+8$, οπότε
  $\mathrm{A}\mid\mathrm{B}\Leftrightarrow 8m^3 \mid 8m^3+8 \Leftrightarrow 8m^3 \mid 8 \Leftrightarrow m=1,$ αφού $m>0 \Rightarrow (m,n)=(1,1).$
- $m-n=1$. Τότε έχουμε

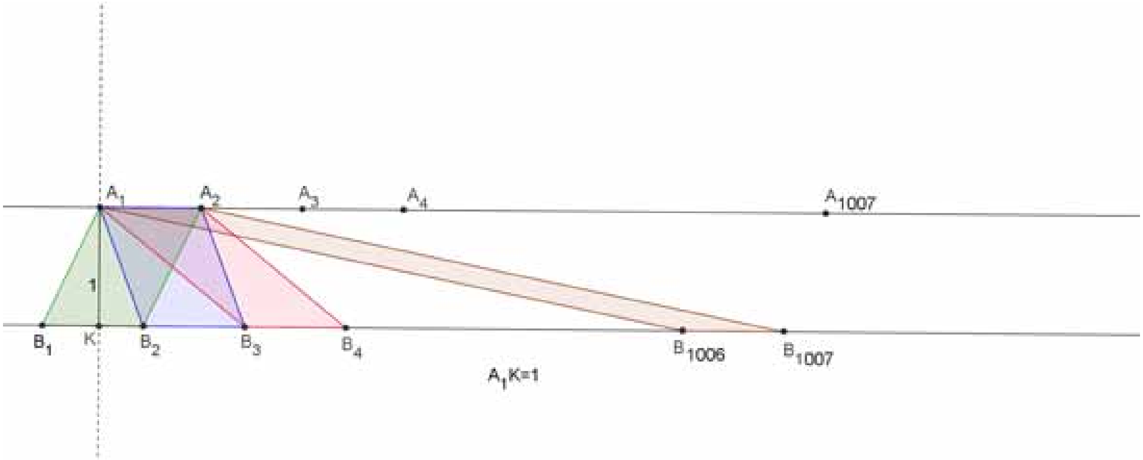
$$\mathrm{A}=(2n+1)^3, \mathrm{B}=2n\left(3(n+1)^2+n^2\right)+8=8n^3+12n^2+6n+8=(2n+1)^3+7.$$

Επομένως, $\mathrm{A}|\mathrm{B} \Leftrightarrow (2n+1)^3|7 \Rightarrow 2n+1=1 \Leftrightarrow n=0,\ m=1$ και $(m,n)=(1,0)$.

- $m-n=2$. Τότε $\mathrm{A}=8(n+1)^3=\mathrm{B}$, οπότε έχουμε άπειρα ζεύγη λύσεων της μορφής $(k+2,k)$, με $k\geq 0$.

Πρόβλημα 3.
Είναι δυνατόν να τοποθετήσουμε κατάλληλα στο επίπεδο 2014 σημεία, έτσι ώστε με κορυφές από αυτά τα σημεία να κατασκευάσουμε 1006^2 παραλληλόγραμμα εμβαδού 1;

Λύση
Θα αποδείξουμε ότι είναι δυνατόν. Παίρνουμε δύο παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που να έχουν απόσταση 1. Τοποθετούμε σε κάθε μία από αυτές από 1007 σημεία ώστε τα οποία να απέχουν μεταξύ τους απόσταση 1. Τότε στην ε_1 έχουμε 1006 μοναδιαία τμήματα και στην ε_2 έχουμε 1006 μοναδιαία τμήματα. Οποιοδήποτε μοναδιαίο τμήμα της ε_1 με οποιοδήποτε μοναδιαίο τμήμα της ε_2 δημιουργούν ένα παραλληλόγραμμο εμβαδού 1. Επομένως, συνολικά τα παραλληλόγραμμα εμβαδού 1 είναι: $1006 \cdot 1006 = 1006^2$.



Σχήμα 1

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB} \leq \mathrm{A\Gamma}$ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του $c(\mathrm{O}, R)$. Η κάθετη από την κορυφή Α προς την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ την τέμνει στο σημείο Δ.

(α) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$, να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$.

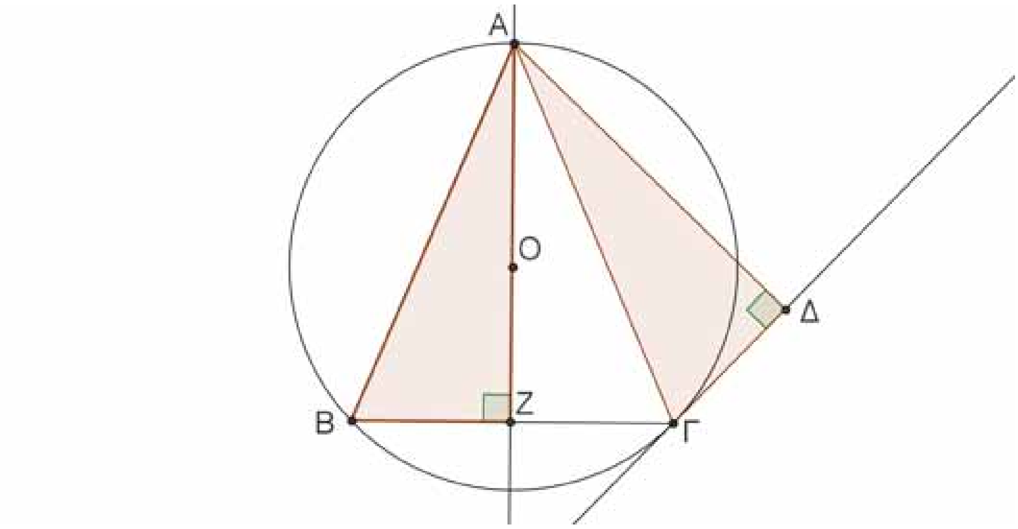
(β) Αν ισχύει ότι $\Gamma\Delta = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Λύση
(α) Αν Ζ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, τότε η ΑΖ είναι ύψος και διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΖ και ΑΓΔ είναι ίσα, γιατί έχουν:

- ΑΓ κοινή πλευρά (υποτείνουσα)

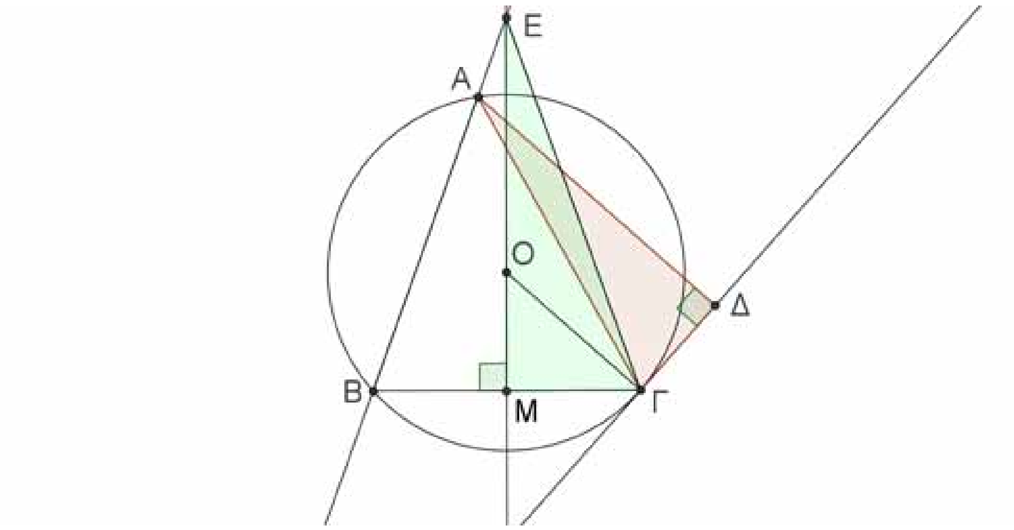
- $A\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{\Gamma}Z$, αφού $A\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{B}\Gamma$ (γωνία χορδής – εφαπτομένης και αντίστοιχη εγγεγραμμένη) και $A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}Z$, αφού $AB = A\Gamma$.

Επομένως θα είναι και $\Gamma\Delta = \Gamma Z = \dfrac{B\Gamma}{2}$.



Σχήμα 2

(β) Ας υποθέσουμε ότι $AB < A\Gamma$. Θεωρούμε τη μεσοκάθετο στο μέσο M της $B\Gamma$ που τέμνει την προέκταση της AB στο E. Τότε $A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}\Delta$ (γωνία υπό χορδής και εφαπτομένης), και επιπλέον από την εκφώνηση έχουμε ότι $2\Gamma\Delta = B\Gamma = 2BM$, οπότε $\Gamma\Delta = BM$. Επομένως, τα ορθογώνια τρίγωνα EBM και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα, οπότε θα είναι $A\Gamma = EB$. Όμως $EB = E\Gamma$, οπότε $A\Gamma = E\Gamma$. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού η γωνία $E\hat{A}\Gamma = 180° - \hat{A}$ είναι αμβλεία, οπότε το τρίγωνο $EA\Gamma$ θα είχε δύο αμβλείες γωνίες. Επομένως, θα είναι $AB = A\Gamma$ και το τρίγωνο $AB\Gamma$ ισοσκελές.



Σχήμα 3