ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
30η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
23 Φεβρουαρίου 2013

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Θέματα μικρών τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

(α) Να γράψετε την παράσταση $\mathrm{A}=k^4+4$, όπου k θετικός ακέραιος, ως γινόμενο δύο παραγόντων που ο καθένας τους να είναι άθροισμα δύο τετραγώνων ακεραίων αριθμών.

(β) Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$\mathrm{K}=\frac{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\left(6^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\cdots\cdot\left((2n)^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\left(5^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\cdots\cdot\left((2n-1)^4+\frac{1}{4}\right)}$$

και να τη γράψετε ως άθροισμα τετραγώνων δύο διαδοχικών θετικών ακέραιων.

Λύση

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned}k^4+4&=\left(k^2\right)^2+4k^2+2^2-4k^2=\left(k^2+2\right)^2-(2k)^2\\&=\left(k^2+2-2k\right)\left(k^2+2+2k\right)=\left[(k-1)^2+1^2\right]\left[(k+1)^2+1^2\right].\end{aligned}$$

(β) Πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος επί $\left(2^4\right)^n$, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}\mathrm{K}&=\frac{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\left(6^4+\frac{1}{4}\right)\cdots\left[(2n)^4+\frac{1}{4}\right]}{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\left(5^4+\frac{1}{4}\right)\cdots\left[(2n-1)^4+\frac{1}{4}\right]}\\
&=\frac{\left(4^4+4\right)\left(8^4+4\right)\left(12^4+4\right)\cdots\left[(4n)^4+4\right]}{\left(2^4+4\right)\left(6^4+4\right)\left(10^4+4\right)\cdots\left[(4n-2)^4+4\right]}\\
&=\frac{\left(3^2+1\right)\left(5^2+1\right)\left(7^2+1\right)\left(9^2+1\right)\left(11^2+1\right)\cdots\left[(4n-3)^2+1\right]\left[(4n-1)^2+1\right]\left[(4n+1)^2+1\right]}{\left(1^2+1\right)\left(3^2+1\right)\left(5^2+1\right)\left(7^2+1\right)\left(9^2+1\right)\left(11^2+1\right)\left(13^2+1\right)\cdots\left[(4n-3)^2+1\right]\left[(4n-1)^2+1\right]}\\
&=\frac{(4n+1)^2+1}{1^2+1}=8n^2+4n+1=4n^2+4n^2+4n+1=(2n)^2+(2n+1)^2.\end{aligned}$$

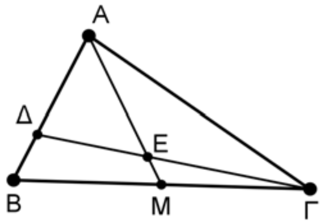
Παρατήρηση. Για το ερώτημα (β) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και την παραγοντοποίηση

$$k^4+\frac{1}{4}=\left(k^2+\frac{1}{2}\right)^2-k^2=\left(k^2+\frac{1}{2}-k\right)\left(k^2+\frac{1}{2}+k\right)=\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right].$$

Για την απλοποίηση του κλάσματος εργαζόμαστε όπως προηγουμένως.

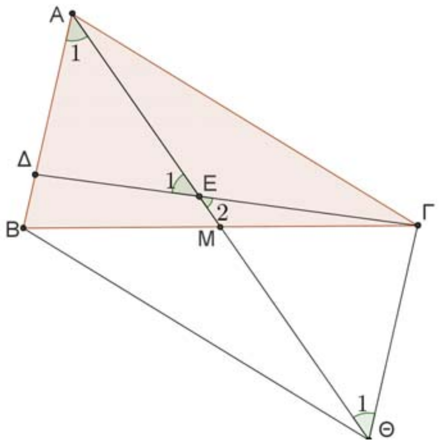
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με $AB<A\Gamma$. Έστω M το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Στην πλευρά AB θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε, αν το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$ τέμνει τη διάμεσο AM στο σημείο E, τότε ισχύει ότι $A\Delta=\Delta E$. Να αποδείξετε ότι $AB=\Gamma E$.



Λύση (1ος τρόπος)

Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά τμήμα $M\Theta=AM$. Επειδή οι διαγώνιες του τετραπλεύρου $AB\Theta\Gamma$ διχοτομούνται το τετράπλευρο αυτό είναι παραλληλόγραμμο.



Σχήμα 1

Άρα είναι $AB \parallel \Gamma\Theta$ και $\hat{A}_1=\hat{\Theta}_1$, (εντός εναλλάξ γωνίες). Όμως από την ισότητα $A\Delta=\Delta E$ της υπόθεσης έπεται ότι $\hat{A}_1=\hat{E}_1$ και επιπλέον $\hat{E}_1=\hat{E}_2$, ως κατά κορυφή. Άρα είναι και $\hat{\Theta}_1=\hat{E}_2$, οπότε το τρίγωνο $E\Gamma\Theta$ είναι ισοσκελές με $\Gamma E=\Gamma\Theta$. Όμως από το παραλληλόγραμμο $AB\Theta\Gamma$ έχουμε ότι $AB=\Gamma\Theta$, οπότε από τις δύο τελευταίες ισότητες προκύπτει το ζητούμενο $AB=\Gamma E$.

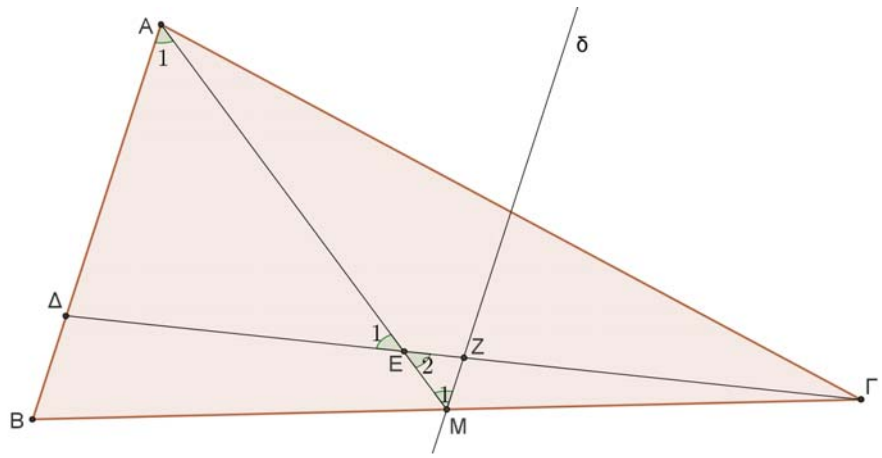
2ος τρόπος

Από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε ευθεία δ παράλληλη προς την πλευρά ΑΒ, άρα και προς την πλευρά ΒΔ του τριγώνου ΒΓΔ, η οποία τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ, έστω στο σημείο Ζ. Τότε το Ζ θα είναι το μέσο της πλευράς ΓΔ, δηλαδή

$$\Gamma Z=Z\Delta \qquad (1)$$

και επιπλέον ισχύει ότι

$$B\Delta=2\cdot MZ. \qquad (2)$$



Σχήμα 2

Επίσης έχουμε $\hat{A}_1 = \hat{M}_1$, (εντός εναλλάξ γωνίες). Όμως από την ισότητα $A\Delta = \Delta E$ της υπόθεσης έπεται ότι $\hat{A}_1 = \hat{E}_1$ και επιπλέον $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$, ως κατά κορυφή.

Άρα είναι και $\hat{M}_1 = \hat{E}_2$, οπότε το τρίγωνο ΕΜΖ είναι ισοσκελές με

$$ZM = EZ. \qquad (3)$$

Από τις παραπάνω ισότητες έχουμε:

$$\begin{aligned} \Gamma E &= \Gamma Z + ZE \\ &= \Delta Z + ZE && \text{(λόγω της (1))} \\ &= \Delta E + 2\cdot ZM && \text{(λόγω της (3))} \\ &= A\Delta + \Delta B = AB. && \text{(λόγω της υπόθεσης και της (2))} \end{aligned}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Έστω $A = \overline{abcd} = a\cdot 10^3 + b\cdot 10^2 + c\cdot 10 + d$ τετραψήφιος θετικός ακέραιος με ψηφία τέτοια ώστε να ισχύουν: $a \geq 7$ και $a > b > c > d > 0$. Θεωρούμε και τον θετικό ακέραιο $B = \overline{dcba} = d\cdot 10^3 + c\cdot 10^2 + b\cdot 10 + a$, που προκύπτει από τον A με αντίστροφη γραφή των ψηφίων του. Αν δίνεται ότι ο αριθμός $A+B$ έχει όλα τα ψηφία του περιττούς ακέραιους, να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του αριθμού A.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$A+B = (a+d)\cdot 10^3 + (b+c)\cdot 10^2 + (b+c)\cdot 10 + (a+d).$$

Από την υπόθεση, όλα τα ψηφία του ακέραιου $A+B$ είναι περιττοί ακέραιοι. Όμως για την εύρεση των ψηφίων του ακεραίου $A+B$ πρέπει να ξέρουμε αν οι ακέραιοι $a+d$ και $b+c$ είναι μικρότεροι του 10. Έτσι διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(α) Έστω $a+d \geq 10$ και $b+c \geq 10$. Τότε, επειδή $a > b > c > d > 0$, θα έχουμε:

$$a+d = 10+k, k = 0,1,2,\dots,5,$$
$$b+c = 10+\ell,\ \ \ell = 0,1,2,\dots,5.$$

Έτσι ο αριθμός $A+B$ γράφεται στη μορφή

$$\begin{aligned} A+B &= (10+k)\cdot 10^3 + (10+\ell)\cdot 10^2 + (10+\ell)\cdot 10 + (10+k) \\ &= 10^4 + (k+1)\cdot 10^3 + (\ell+1)\cdot 10^2 + (\ell+1)\cdot 10 + k, \end{aligned}$$

δηλαδή έχει ψηφία $1, k+1, \ell+1, \ell+1, k$, τα οποία πρέπει να είναι περιττοί ακέραιοι, που είναι άτοπο, λόγω της ύπαρξης των διαδοχικών ακέραιων k και $k+1$.

(β) Έστω $a+d \geq 10$ και $b+c<10$. Τότε, επειδή $a>b>c>d>0$, θα έχουμε: $a+d=10+k, k=0,1,2,...,5$ και ο αριθμός $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ γράφεται

$$\begin{aligned}\mathrm{A}+\mathrm{B} &= (10+k)\cdot 10^3+(b+c)\cdot 10^2+(b+c)\cdot 10+(10+k)\\ &= 10^4+k\cdot 10^3+(b+c)\cdot 10^2+(b+c+1)\cdot 10+k,\end{aligned}$$

οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $b+c=9$, τότε ο $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ έχει ψηφίο δεκάδων το 0, που είναι άρτιος, άτοπο.
- Αν $b+c<9$, τότε ο $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ έχει ψηφία τους ακέραιους $b+c$ και $b+c+1$ που δεν είναι δυνατόν να είναι και οι δύο περιττοί.

(γ) Έστω $a+d<10$ και $b+c \geq 10$. Τότε, επειδή $a>b>c>d>0$, θα έχουμε: $b+c=10+\ell, \ell=0,1,2,...,5$ και ο αριθμός $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ γράφεται

$$\begin{aligned}\mathrm{A}+\mathrm{B} &= (a+d)\cdot 10^3+(10+\ell)\cdot 10^2+(10+\ell)\cdot 10+(a+d)\\ &= (a+d+1)\cdot 10^3+(\ell+1)\cdot 10^2+\ell\cdot 10+(a+d),\end{aligned}$$

οπότε οι ακέραιοι ℓ και $\ell+1$ είναι ψηφία του $\mathrm{A}+\mathrm{B}$, άτοπο.

(δ) Έστω $a+d<10$ και $b+c<10$. Τότε τα ψηφία του αριθμού $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ είναι οι ακέραιοι $a+d$ και $b+c$, οι οποίοι πρέπει να είναι περιττοί. Λόγω των περιορισμών $a>b>c>d>0$ και $a \geq 7$, έπεται ότι $a+d=9$ και επίσης $5 \geq c \geq 2, 6 \geq b \geq 3$, οπότε $10>b+c \geq 5$, δηλαδή $b+c \in \{5,7,9\}$ Επομένως, έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- $a+d=9$ με $a=8, d=1$ και $b+c=9$ με $b=7,\ c=2$ ή $b=6,\ c=3$ ή $b=5,\ c=4$
  Επομένως, προκύπτουν οι αριθμοί: $\mathrm{A}=\mathbf{8721}$, $\mathrm{A}=\mathbf{8631}$, $\mathrm{A}=\mathbf{8541}$.
- $a+d=9$ με $a=7, d=2$ και $b+c=9$ με $b=6,\ c=3$ ή $b=5,\ c=4$.
  Στη περίπτωση αυτή προκύπτουν οι αριθμοί: $\mathrm{A}=\mathbf{7632}$, $\mathrm{A}=\mathbf{7542}$
- $a+d=9$ με $a=8, d=1$ και $b+c=7$ με $b=5,\ c=2$ ή $b=4,\ c=3$.
  Στη περίπτωση αυτή προκύπτουν οι αριθμοί: $\mathrm{A}=\mathbf{8521}$, $\mathrm{A}=\mathbf{8431}$.
- $a+d=9$ με $a=7, d=2$ και $b+c=7$ με $b=4,\ c=3$.
  Στη περίπτωση αυτή προκύπτει ο αριθμός: $\mathrm{A}=\mathbf{7432}$.
- $a+d=9$ με $a=8, d=1$ και $b+c=5$ με $b=3,\ c=2$.
  Στη περίπτωση αυτή προκύπτει ο αριθμός: $\mathrm{A}=\mathbf{8321}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Να βρείτε όλες τις τριάδες (x,y,z) θετικών ακέραιων αριθμών που είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{4}{z}=1$$

Λύση

Αν είναι $x \geq 3$ και $y \geq 3$, τότε θα έχουμε:

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{4}{z} \leq \frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{4}{z}=1-\frac{4}{z}<1,$$

οπότε η εξίσωση δεν επαληθεύεται. Επομένως θα είναι: $x \leq 2$ ή $y \leq 2$, οπότε πρέπει να ισχύει ένα από τα επόμενα: $x=1$ ή $x=2$ ή $y=1$ ή $y=2$.

Στη συνέχεια διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Για $x=1$ η εξίσωση γίνεται: $\frac{2}{y}-\frac{4}{z}=0 \Leftrightarrow z=2y \Leftrightarrow y=k,\ z=2k,$ όπου k θετικός ακέραιος, οπότε έχουμε τις λύσεις $(x,y,z)=(1,k,2k), k\in\mathbb{Z}$ θετικός.
- Για $x=2$ η εξίσωση γίνεται:
$$\frac{2}{y}-\frac{4}{z}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{y}=\frac{8+z}{2z} \Leftrightarrow y=\frac{4z}{z+8} \Leftrightarrow y=\frac{4(z+8)-32}{z+8} \Leftrightarrow y=4-\frac{32}{z+8}.$$
Επειδή ο y πρέπει να είναι θετικός ακέραιος, έπεται ότι ο $z+8$ πρέπει να είναι θετικός διαιρέτης του 32 και μεγαλύτερος του 8. Άρα οι δυνατές τιμές του $z+8$ είναι 16 ή 32, οπότε $z=8$ ή $z=24$. Για $z=8$ λαμβάνουμε $y=2$, ενώ για $z=24$ λαμβάνουμε $y=3$. Άρα στην περίπτωση αυτή έχουμε τις λύσεις
$$(x,y,z)=(2,2,8) \text{ ή } (x,y,z)=(2,3,24).$$
- Για $y=1$ η εξίσωση γίνεται: $\frac{1}{x}-\frac{4}{z}=-1 \Leftrightarrow \frac{4}{z}=\frac{1+x}{x} \Leftrightarrow z=\frac{4x}{1+x}=4-\frac{4}{1+x}.$
Επειδή πρέπει ο z να είναι θετικός ακέραιος, πρέπει ο $1+x$ να είναι θετικός διαιρέτης του 4 και μεγαλύτερος του 1, δηλαδή πρέπει $1+x=2$ ή $1+x=4$ $\Leftrightarrow x=1$ *ή* $x=3$ Για $x=1$ λαμβάνουμε $z=2$, ενώ για $x=3$ λαμβάνουμε $z=3$. Άρα στην περίπτωση αυτή έχουμε τις λύσεις
$$(x,y,z)=(1,1,2) \text{ ή } (x,y,z)=(3,1,3).$$
- Για $y=2$ η εξίσωση γίνεται: $\frac{1}{x}-\frac{4}{z}=0 \Leftrightarrow z=4x \Leftrightarrow x=\ell,\ z=4\ell,$ όπου ℓ θετικός ακέραιος. Άρα, στην περίπτωση αυτή έχουμε τις λύσεις $(x,y,z)=(\ell,2,4\ell)$, όπου ℓ θετικός ακέραιος.

Συνολικά, λαμβάνοντας υπόψη και τις επικαλύψεις των λύσεων που βρήκαμε, έχουμε τις λύσεις:

$$(x,y,z)=(1,k,2k), \text{ όπου } k \text{ θετικός ακέραιος,}$$
$$(x,y,z)=(\ell,2,4\ell), \text{ όπου } \ell \text{ θετικός ακέραιος,}$$
$$(x,y,z)=(3,1,3) \text{ και } (x,y,z)=(2,3,24).$$