

**ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ**  
**28<sup>η</sup> Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα**

**"Ο Αρχιμήδης"**

**ΣΑΒΒΑΤΟ, 26 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2011**

**Ενδεικτικές Λύσεις θεμάτων μικρών τάξεων**

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1**

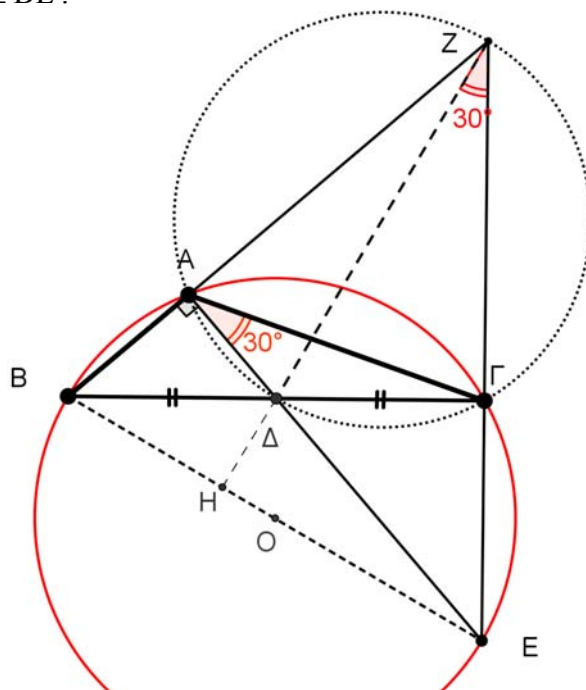
Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 120^\circ$ . Αν  $\Delta$  είναι το μέσον της πλευράς  $B\Gamma$ , δίνεται ότι η ευθεία  $A\Delta$  είναι κάθετη προς την πλευρά  $AB$  και τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου  $AB\Gamma$  στο σημείο  $E$ . Οι ευθείες  $BA$  και  $E\Gamma$  τέμνονται στο  $Z$ . Να αποδείξετε ότι:

- (α)  $Z\Delta \perp BE$ ,      (β)  $Z\Delta = B\Gamma$ .

**Λύση**

(α) Επειδή είναι  $\hat{B}\hat{A}\hat{E} = 90^\circ$  η  $BE$  είναι διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $AB\Gamma$ . Επομένως θα είναι και  $\hat{B}\hat{\Gamma}\hat{E} = 90^\circ$ . Έτσι στο τρίγωνο  $ZBE$  τα ευθύγραμμα τμήματα  $EA$  και  $B\Gamma$  είναι ύψη του τριγώνου που τέμνονται στο σημείο  $\Delta$ .

Επομένως η ευθεία  $Z\Delta$  είναι η ευθεία του τρίτου ύψους του τριγώνου  $ZBE$ , δηλαδή είναι  $Z\Delta \perp BE$ .



Σχήμα 1

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να αποδείξουμε ότι:  $Z\hat{B}\hat{H} = 90^\circ$ . Πράγματι, έχουμε

$$Z\hat{B}\hat{H} = 180^\circ - (\hat{H}\hat{B}\hat{Z} + \hat{B}\hat{Z}\hat{H}) \quad (1)$$

Όμως έχουμε

$$\hat{H}\hat{B}\hat{Z} = \hat{E}\hat{B}\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma}\hat{B}\hat{A} = \hat{E}\hat{A}\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma}\hat{B}\hat{A} = 120^\circ - 90^\circ + \hat{\Gamma}\hat{B}\hat{A} = 30^\circ + \hat{B}. \quad (2)$$

Επίσης από το εγγράψιμο τετράπλευρο  $A\Delta\Gamma Z$  (γιατί  $\widehat{AZ} = \widehat{\Gamma Z} = 90^\circ$ ) έχουμε ότι:

$$\widehat{BZH} = \widehat{AZ\Delta} = \widehat{\Gamma} \quad (3)$$

Λόγω των (2) και (3) η σχέση (1) γίνεται:

$$\widehat{BZH} = 180^\circ - (30^\circ + \widehat{B} + \widehat{\Gamma}) = 150^\circ - (\widehat{B} + \widehat{\Gamma}) = 150^\circ - (180^\circ - 120^\circ) = 90^\circ.$$

(β) Παρατηρούμε ότι το τετράπλευρο  $A\Delta\Gamma Z$  είναι εγγράψιμο, αφού  $\widehat{AZ} + \widehat{\Gamma Z} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ . Άρα θα έχουμε  $\widehat{\Delta Z\Gamma} = \widehat{\Delta\Gamma Z} = \widehat{B\Gamma\Delta} - \widehat{B\Delta Z} = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$ .

Επομένως στο ορθογώνιο τρίγωνο  $\Delta\Gamma Z$  η υποτείνουσα  $Z\Delta$  θα είναι διπλάσια της κάθετης πλευράς  $\Delta\Gamma$ , δηλαδή  $Z\Delta = 2 \cdot \Delta\Gamma = B\Gamma$ , αφού  $\Delta$  μέσο της πλευράς  $B\Gamma$ .

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Θεωρούμε το σύνολο των τετραψήφιων θετικών ακέραιων αριθμών  $x = \overline{\alpha\beta\gamma\delta}$  των οποίων όλα τα ψηφία είναι διαφορετικά από το μηδέν και διαφορετικά μεταξύ τους. Θεωρούμε επίσης τους αριθμούς  $y = \overline{\delta\gamma\beta\alpha}$  και υποθέτουμε  $x > y$ . Βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή της διαφοράς  $x - y$ , καθώς και τους αντίστοιχους τετραψήφιους ακέραιους  $x, y$  για τις οποίες λαμβάνονται αυτές οι τιμές.

### Λύση

Θεωρούμε τη δεκαδική αναπαράσταση των αριθμών :

$$\begin{aligned} x - y &= 1000\alpha + 100\beta + 10\gamma + \delta - 1000\delta - 100\gamma - 10\beta - \alpha \\ &= 1000(\alpha - \delta) + 100(\beta - \gamma) + 10(\gamma - \beta) + \delta - \alpha \\ &= 999(\alpha - \delta) + 90(\beta - \gamma) \\ &= 9(111(\alpha - \delta) + 10(\beta - \gamma)). \end{aligned}$$

Αρκεί να προσδιορίσουμε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της παράστασης:

$$A = 111(\alpha - \delta) + 10(\beta - \gamma).$$

Οι αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  είναι θετικοί μονοψήφιοι ακέραιοι (διαφορετικοί μεταξύ τους). Εφόσον  $x > y$ , θα ισχύει  $\alpha > \delta$ .

Η παράσταση  $A$  γίνεται μέγιστη, όταν οι αριθμοί  $\alpha - \delta$  και  $\beta - \gamma$  γίνουν μέγιστοι και επί πλέον  $\alpha - \delta > \beta - \gamma$ . Η διαφορά  $\alpha - \delta$  γίνεται μέγιστη όταν  $\alpha = 9$  και  $\delta = 1$ . Η διαφορά  $\beta - \gamma$  γίνεται μέγιστη όταν  $\beta = 8$  και  $\gamma = 2$ .

Άρα  $x = 9821$  και  $y = 1289$  είναι οι ζητούμενοι ακέραιοι οι οποίοι δημιουργούν τη μεγαλύτερη διαφορά  $x - y = 9821 - 1289 = 8532$ .

Η παράσταση  $A$  γίνεται ελάχιστη, όταν οι αριθμοί  $\alpha - \delta$  και  $\beta - \gamma$  γίνουν ελάχιστοι.

Η ελάχιστη τιμή της διαφοράς  $\alpha - \delta$  είναι το 1. Άρα οι δυνατές τιμές του ζεύγους  $(\alpha, \delta)$  είναι:

$$(9, 8), (8, 7), (7, 6), (6, 5), (5, 4), (4, 3), (3, 2) \text{ και } (2, 1).$$

Για όλες τις παραπάνω δυνατές τιμές του ζεύγους  $(\alpha, \delta)$ , η τιμή της παράστασης  $A$  γίνεται:

$$A = 111 + 10(\beta - \gamma).$$

Η ελάχιστη τιμή τώρα της διαφοράς  $\beta - \gamma$  είναι το  $-8$  που δημιουργείται για  $\beta = 1$  και  $\gamma = 9$ .

Απορρίπτοντας τέλος τα ζεύγη (9,8) και (2,1) (διότι τα ψηφία του τετραψήφιου αριθμού είναι διαφορετικά μεταξύ τους), καταλήγουμε στον παρακάτω πίνακα δυνατών τιμών των αριθμών  $x, y$  καθώς και την ελάχιστη διαφορά.

3192	2913	279
4193	3914	279
5194	4915	279
6195	5916	279
7196	6917	279
8197	7918	279

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν ο αριθμός  $3\nu+1$ , όπου  $\nu$  ακέραιος, είναι πολλαπλάσιο του 7, να βρείτε τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης:

- (α) του  $\nu$  με το 7,  
 (β) του  $\nu^m$  με το 7, για τις διάφορες τιμές του θετικού ακέραιου  $m$ .

#### Λύση

(α) Έστω  $3\nu+1=7\kappa$ , όπου  $\nu, \kappa$  ακέραιοι. Ο ακέραιος  $\nu$  έχει τη μορφή  $\nu=7\rho+\nu$ , όπου  $\nu \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$  και  $\rho$  ακέραιος. Τότε έχουμε:

$$3(7\rho+\nu)+1=7\kappa \Leftrightarrow 21\rho+3\nu+1=7\kappa \Leftrightarrow 3\nu+1=\text{πολλαπλάσιο του } 7,$$

οπότε η μόνη δυνατή τιμή για το  $\nu$  είναι το 2. Έτσι έχουμε  $\nu=7\rho+2$ , όπου  $\rho$  ακέραιος, οπότε το μοναδικό δυνατό υπόλοιπο της διαίρεσης του  $\nu$  με το 7 είναι το 2.

(β) Έχουμε

$$\nu^m = (7\rho+2)^m = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (7\rho)^{m-i} 2^i = \text{πολ.}7 + 2^m.$$

Επομένως, αρκεί να βρούμε τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης του  $2^m$  με το 7.

Αν υποθέσουμε ότι  $m=3\sigma+\nu$ , όπου  $\nu \in \{0,1,2\}$ , τότε λαμβάνουμε:

$$2^m = 2^{3\sigma+\nu} = 8^\sigma \cdot 2^\nu = (7+1)^\sigma \cdot 2^\nu = (\text{πολ.}7+1) \cdot 2^\nu = \text{πολ.}7 + 2^\nu,$$

όπου  $\nu \in \{0,1,2\}$ . Άρα τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης του  $\nu^m$  με το 7, για τις διάφορες τιμές του θετικού ακέραιου  $m$  είναι τα  $2^0=1$ ,  $2^1=2$  και  $2^2=4$ .

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Αν  $x, y, z$  είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 12, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + 3 \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

#### Λύση

Επειδή οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί  $x, y, z$  έχουν άθροισμα 12, αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x+y+z}{4} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}. \quad (1)$$

Επειδή οι πραγματικοί αριθμοί  $x, y, z$  είναι θετικοί, από την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου έχουμε

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{4} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{4}} = \sqrt{x}, \quad (2)$$

$$\frac{y}{z} + \frac{z}{4} \geq 2\sqrt{\frac{y}{z} \cdot \frac{z}{4}} = \sqrt{y}, \quad (3)$$

$$\frac{z}{x} + \frac{x}{4} \geq 2\sqrt{\frac{z}{x} \cdot \frac{x}{4}} = \sqrt{z}. \quad (4)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (2), (3) και (4) προκύπτει η ανισότητα (1).

Η ισότητα ισχύει, όταν οι ανισότητες (2), (3) και (4) αληθεύουν και οι τρεις ως ισότητες., δηλαδή όταν

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{4}, \frac{y}{z} = \frac{z}{4}, \frac{z}{x} = \frac{x}{4} \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{4}, y = \frac{z^2}{4}, z = \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{4}, y = \frac{z^2}{4}, z = \frac{1}{4} \left( \frac{y^2}{4} \right)^2 = \frac{y^4}{4^3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y^2}{4}, y = \frac{z^2}{4}, z = \frac{1}{4^3} \left( \frac{z^2}{4} \right)^4$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y^2}{4}, y = \frac{z^2}{4}, z = \frac{1}{4^7} z^8$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y^2}{4}, y = \frac{z^2}{4}, z^7 = 4^7 \Leftrightarrow x = y = z = 4.$$