ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
27η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 27 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2010

Ενδεικτικές λύσεις θεμάτων μικρών τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να προσδιορίσετε το πλήθος των θετικών ακέραιων που δεν είναι δυνατόν να γραφούν στη μορφή $80\kappa+3\lambda,$ όπου $\kappa,\lambda\in\mathbb{N}=\{0,1,2,...\}$.

Λύση

Θεωρούμε τους αριθμούς της μορφής $80\kappa+3\lambda,$ όπου $\kappa,\lambda\in\mathbb{N}=\{0,1,2,...\}$, σταθεροποιώντας την τιμή του κ.

Για $\kappa=0$ λαμβάνουμε όλα τα πολλαπλάσια του 3 αρχίζοντας από το 0.

Για $\kappa=1$ λαμβάνουμε τους αριθμούς

$$\mathrm{A}=80+3\lambda=3(26+\lambda)+2=3\rho+2,\rho\geq 26,$$

δηλαδή όλους τους αριθμούς που διαιρούμενοι με το 3 δίνουν υπόλοιπο 2, εκτός από τους 26 συνολικά αριθμούς της μορφής $3\rho+2,$ για $\rho=0,1,2,...25$.

Για $\kappa=2$ λαμβάνουμε τους αριθμούς

$$\mathrm{A}=160+3\lambda=3(53+\lambda)+1=3\rho+1,\rho\geq 53,$$

δηλαδή όλους τους αριθμούς που διαιρούμενοι με το 3 δίνουν υπόλοιπο 2, εκτός από τους 53 συνολικά αριθμούς της μορφής $3\rho+1,$ για $\rho=0,1,2,...52$.

Για $\kappa\geq 3$ προκύπτουν αριθμοί μεγαλύτεροι ή ίσοι του 240 που έχουμε ήδη εκφράσει στη μορφή $80\kappa+3\lambda,$ με $\kappa,\lambda\in\mathbb{N}$. Έτσι συνολικά δεν μπορούμε να εκφράσουμε στη ζητούμενη μορφή τους 79 αριθμούς 2,5,8, ... ,77 και 1,4,7,... , 157, που περιγράψαμε παραπάνω.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ με πλευρές $\mathrm{AB}=\alpha$ και $\mathrm{B\Gamma}=\beta$. Έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ προς το μέρος του Α κατά τμήμα $\mathrm{AE}=\mathrm{AO}$ και την διαγώνιο ΔΒ προς το μέρος του Β κατά τμήμα $\mathrm{BZ}=\mathrm{BO}$. Αν το τρίγωνο $\mathrm{EZ\Gamma}$ είναι ισόπλευρο, τότε να αποδείξετε ότι:

(i) $\beta=\alpha\sqrt{3}$, **(ii)** $\mathrm{AZ}=\mathrm{EO}$, **(iii)** $\mathrm{EO}\perp\mathrm{Z\Delta}$.

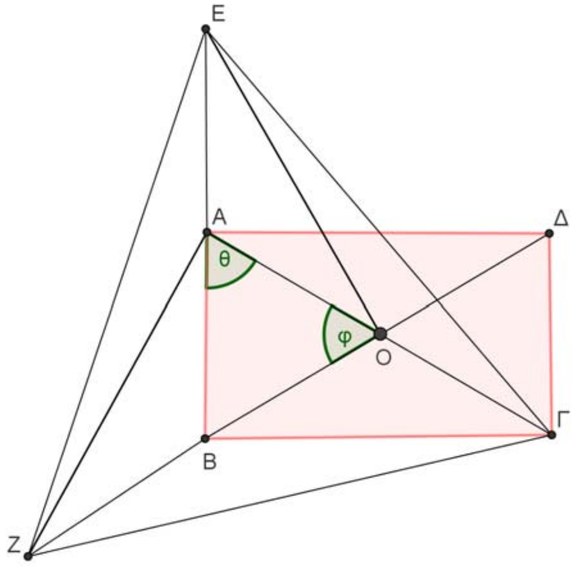
Λύση

Τα τρίγωνα ΕΑΓ και ΖΟΓ έχουν, λόγω των υποθέσεων τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία,

$$\mathrm{AE}=\mathrm{O\Gamma},\ \mathrm{A\Gamma}=\mathrm{OZ}\ \text{και}\ \mathrm{E\Gamma}=\mathrm{Z\Gamma},$$

οπότε είναι ίσα. Άρα θα έχουν και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες. Έτσι προκύπτει η ισότητα

$$\mathrm{E\hat{A}\Gamma = Z\hat{O}\Gamma \Leftrightarrow 180^0 - B\hat{A}O = 180^0 - A\hat{O}B \Leftrightarrow B\hat{A}O = A\hat{O}B},$$



Σχήμα 1

οπότε το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισοσκελές με $\mathrm{AB = BO}$. Όμως ισχύει $\mathrm{AO = OB}$, ως μισά των ίσων διαγωνίων του ορθογωνίου ΑΒΓΔ. Άρα το τρίγωνο ΑΒΟ είναι ισόπλευρο πλευράς $\mathrm{AB} = \alpha$. Το ύψος του τριγώνου ΑΒΟ έχει μήκος $\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$, αλλά ισούται και με το μισό της πλευράς $\mathrm{B\Gamma} = \beta$. Επομένως έχουμε

$$\frac{\beta}{2} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \beta = \alpha\sqrt{3}.$$

(ii) Τα τρίγωνα ΑΖΟ και ΟΕΒ είναι ίσα, αφού έχουν

$$\mathrm{AO = OB,\ OZ = EB} \text{ και } \mathrm{Z\hat{O}A} = 60^\circ = \mathrm{E\hat{B}O}\ .$$

Άρα θα έχουν και $\mathrm{AZ = ZO}$.

(iii) Επειδή είναι $\mathrm{AO = AE = AB}$ η διάμεσος του τριγώνου ΒΟΕ ισούται με το μισό της πλευράς που αντιστοιχεί. Άρα είναι $\mathrm{B\hat{O}E} = 90^\circ$ και $\mathrm{EO \perp Z\Delta}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν a, b είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 3 και οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x, y και z έχουν γινόμενο 1, να αποδείξετε ότι:

$$(ax+b)(ay+b)(az+b) \geq 27\ .$$

Για ποιες τιμές των x, y και z αληθεύει η ισότητα;

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα

$$a^3xyz + a^2b(xy+yz+zx) + ab^2(x+y+z) + b^3 \geq 27\ . \qquad (1)$$

Όμως από την υπόθεση έχουμε ότι οι αριθμοί x, y και z είναι θετικοί με γινόμενο $xyz = 1$, οπότε χρησιμοποιώντας την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου λαμβάνουμε

$$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3\ , \qquad (2)$$

$$xy+yz+zx \ge 3\sqrt[3]{xyyzzx} = 3\sqrt[3]{(xyz)^2} = 3 \qquad (3)$$

Λόγω των (2), (3) και των υποθέσεων $a,b>0$ και $xyz=1$, έχουμε

$$a^3xyz + a^2b(xy+yz+zx) + ab^2(x+y+z) + b^3 \ge a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

οπότε, λόγω της μεταβατικής ιδιότητας, αρκεί, αντί της (1), να αποδείξουμε την ανισότητα

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \ge 27 \text{ ή } (a+b)^3 \ge 27,$$

που ισχύει, αφού δίνεται ότι $a+b=3$.

Η ισότητα αληθεύει για x, y και z για τα οποία οι δύο ανισότητες (2) και (3) ισχύουν ως ισότητες, δηλαδή για $x=y=z=1$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνονται τρεις παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και ε_3 ενός επιπέδου έτσι ώστε η ευθεία ε_2 να έχει την ίδια απόσταση α από τις ε_1 και ε_3. Τοποθετούμε 5 σημεία $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3, \mathrm{M}_4$ και M_5 πάνω στις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και ε_3, έτσι ώστε σε κάθε ευθεία να υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο. Να προσδιορίσετε το μέγιστο αριθμό ισοσκελών τριγώνων που είναι δυνατό να σχηματιστούν με κορυφές τρία από τα σημεία $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3, \mathrm{M}_4$ και M_5 με κατάλληλη τοποθέτησή τους πάνω στις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και ε_3, σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

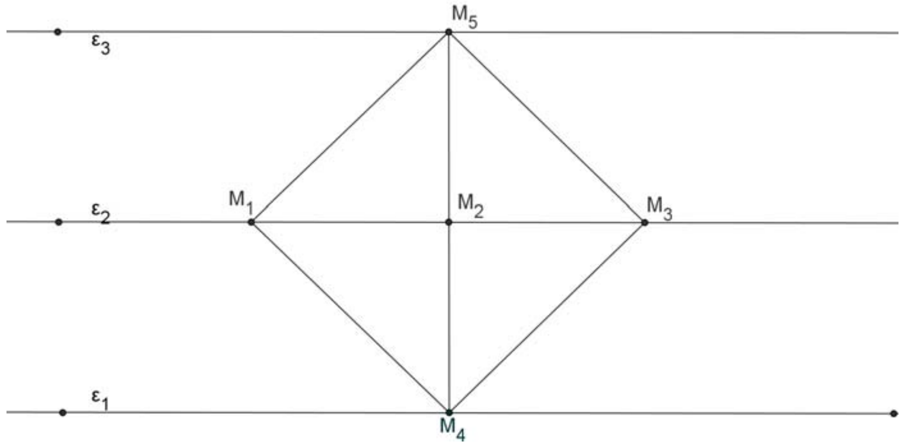
(α) $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3 \in \varepsilon_2$, $\mathrm{M}_4 \in \varepsilon_1$ και $\mathrm{M}_5 \in \varepsilon_3$.

(β) $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2 \in \varepsilon_1$, $\mathrm{M}_3, \mathrm{M}_4 \in \varepsilon_3$ και $\mathrm{M}_5 \in \varepsilon_2$.

Λύση

Πρώτα από όλα σημειώνουμε ότι από 5 σημεία στα οποία δεν υπάρχουν τρία που να είναι συνευθειακά, σχηματίζονται ακριβώς $\binom{5}{3} = 10$ τρίγωνα. Στη συνέχεια για κάθε τριάδα συνευθειακών σημείων χάνεται και ένα τρίγωνο.

(α). Τρία από τα δεδομένα σημεία, έστω τα $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3$, ανήκουν στην ευθεία ε_2.



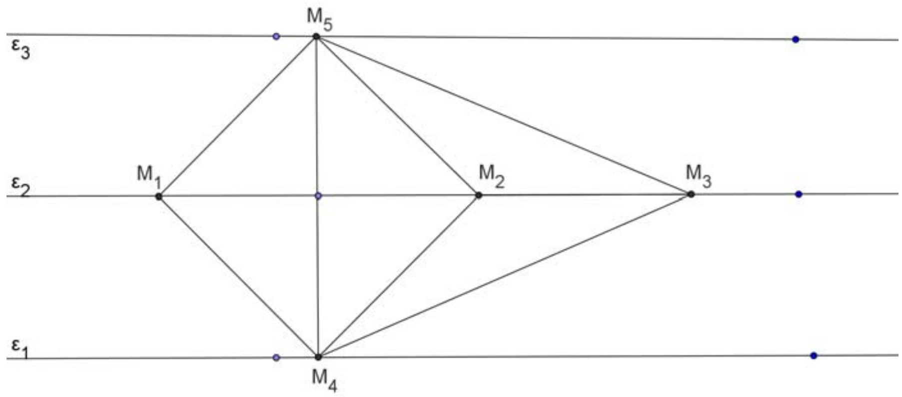
Σχήμα 2

Τότε αυτά δεν σχηματίζουν τρίγωνο, ενώ τα άλλα δύο σημεία πρέπει να τοποθετηθούν από ένα σε καθεμία από τις άλλες δύο ευθείες. Για το σχηματισμό ισοσκελών τριγώνων πρέπει τα σημεία αυτά να ανήκουν σε κάποια από τις μεσοκάθετες των ευθύγραμμων τμημάτων M_1M_2, M_2M_3, M_1M_3. Αν το σημείο M_2 είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος M_1M_3 και τα M_4, M_5 ανήκουν στη μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος M_1M_3 και είναι $M_1M_2 \neq M_2M_4 = \alpha$, τότε σχηματίζονται δύο ισοσκελή τρίγωνα $M_1M_3M_4$ και $M_1M_3M_5$.

Παρατηρούμε όμως ότι, αν θεωρήσουμε στη προηγούμενη περίπτωση $M_1M_2 = M_2M_4 = M_2M_5 = \alpha$, που είναι δυνατόν, αφού οι παράλληλες ευθείες ισαπέχουν, τότε και τα τρίγωνα $M_1M_2M_4$ και $M_2M_3M_4$ καθώς και τα τρίγωνα $M_1M_2M_5$ και $M_2M_3M_5$ είναι ισοσκελή, οπότε έχουμε άλλα 4 ισοσκελή τρίγωνα. Επειδή και η ευθεία ε_2 είναι μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος M_4M_5 και τα τρίγωνα $M_1M_4M_5$ και $M_3M_4M_5$ είναι ισοσκελή. Άρα έχουμε συνολικά κατασκευάσει **8 ισοσκελή τρίγωνα** με κορυφές από τα πέντε σημεία που είναι και ο μέγιστος δυνατός αριθμός στη περίπτωση αυτή, δηλαδή όλα τα σχηματιζόμενα τρίγωνα είναι ισοσκελή.

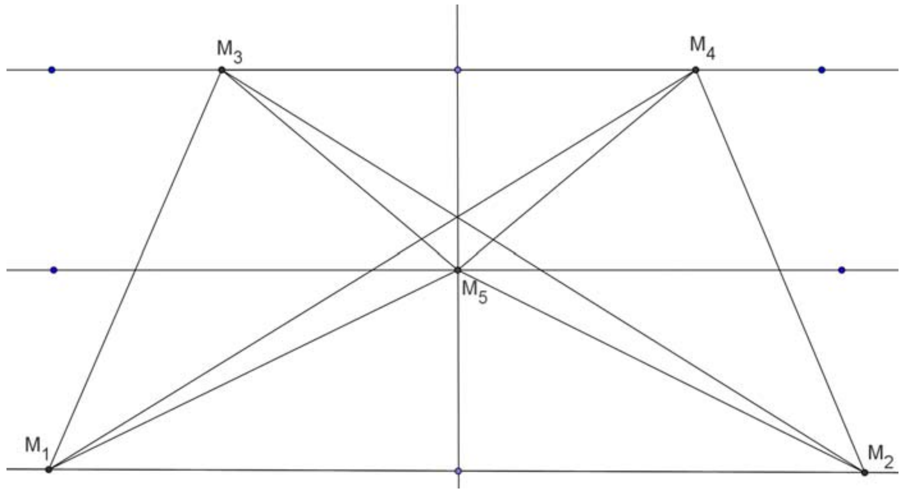
Στην περίπτωση που θεωρήσουμε τα $M_4 \in \varepsilon_1$, $M_5 \in \varepsilon_3$, έτσι ώστε η M_4M_5 να είναι μεσοκάθετη του M_1M_2, τότε το τετράπλευρο $M_1M_4M_2M_5$ είναι ρόμβος (τετράγωνο, αν $M_1M_2 = 2\alpha$) και από τα τέσσερα σημεία προκύπτουν 4 ισοσκελή τρίγωνα, τα $M_1M_2M_4, M_1M_2M_5$, $M_1M_4M_5$ και $M_2M_4M_5$. Το σημείο M_3 μπορεί να επιλεγεί πάνω στην ευθεία ε_2 έτσι ώστε $M_2M_3 = M_3M_4 = M_2M_5$, οπότε πλέον σχηματίζονται άλλα τρία ισοσκελή τρίγωνα, τα $M_2M_3M_4, M_2M_3M_5$ και $M_3M_4M_5$. Έτσι έχουμε συνολικά κατασκευάσει **7 ισοσκελή τρίγωνα**. Αν είναι $M_2M_3 \neq M_2M_4 = M_2M_5$, τότε θα έχουμε συνολικά **5 ισοσκελή τρίγωνα**.

Άρα ο μέγιστος αριθμός ισοσκελών τριγώνων στη περίπτωση αυτή είναι 8.



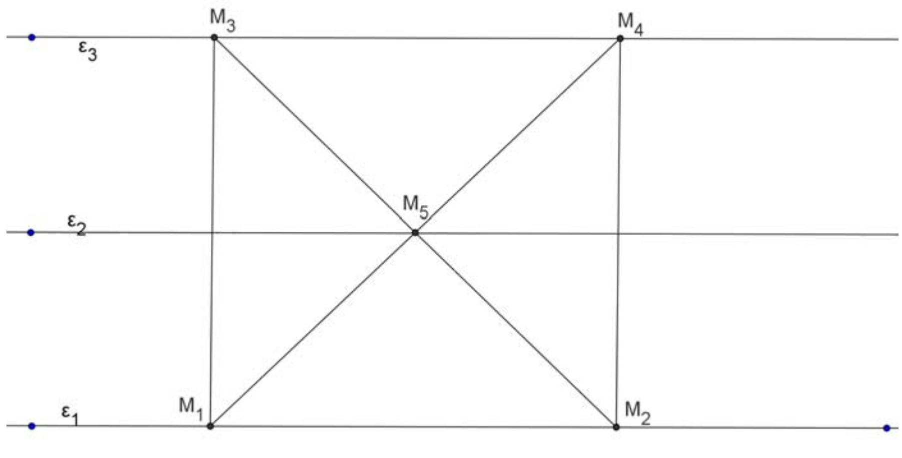
Σχήμα 3

(β). Σε τυχαία τοποθέτηση των σημείων M_1, M_2 πάνω στην ευθεία ε_1 και των M_3, M_4 πάνω στην ευθεία ε_3 το τετράπλευρο $M_1M_2M_4M_3$ είναι τραπέζιο, οπότε από τα 4 αυτά σημεία σχηματίζονται ένα ή δύο ισοσκελή τρίγωνα, μόνο στην περίπτωση που μία από τις βάσεις ισούται με τη μία ή με τις δύο μη παράλληλες πλευρές, αντίστοιχα.



Σχήμα 4

Το σημείο M_5 πρέπει να τοποθετηθεί πάνω στην ευθεία ε_2, αλλά και στη μεσοκάθετη κάποιου από τα ευθύγραμμα τμήματα με άκρα τα σημεία M_1, M_2, M_3 και M_4. Στην περίπτωση ισοσκελούς τραπεζίου $M_1M_2M_4M_3$ οι δύο βάσεις M_1M_2 και M_3M_4 έχουν κοινή μεσοκάθετη δ, οπότε για $M_5 = \delta \cap \varepsilon_2$ προκύπτουν δύο ισοσκελή τρίγωνα. Συνολικά στην τοποθέτηση αυτή σχηματίζονται το **πολύ 4 ισοσκελή τρίγωνα**.



Σχήμα 5

Στην ίδια περίπτωση, αν πάρουμε τα τέσσερα σημεία M_1, M_2, M_3, M_4, πάνω στις δύο ευθείες ε_1 και ε_3, έτσι ώστε να σχηματίζουν τετράγωνο, τότε αυτά σχηματίζουν 4 ισοσκελή τρίγωνα. Στη συνέχεια, αν πάρουμε το σημείο M_5 πάνω στην ευθεία ε_2, έτσι ώστε να συμπίπτει με το κέντρο του τετραγώνου που ορίζουν τα τέσσερα πρώτα σημεία, τότε με μία κορυφή το σημείο M_5 σχηματίζονται άλλα τέσσερα ισοσκελή τρίγωνα Έτσι έχουμε συνολικά **8 ισοσκελή τρίγωνα**.

Στην περίπτωση που τα 4 πρώτα σημεία σχηματίζουν παραλληλόγραμμο, τότε δεν προκύπτουν ισοσκελή τρίγωνα, εκτός εάν το τετράπλευρο $M_1M_2M_4M_3$ είναι ρόμβος, οπότε έχουμε συνολικά **4 ή 5 το πολύ ισοσκελή τρίγωνα**, ανάλογα με τη θέση του σημείου M_5 πάνω στην ευθεία ε_2.