



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
31^η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
22 Φεβρουαρίου 2014

Θέματα μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1

Βρείτε όλα τα πολυώνυμα $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές που ικανοποιούν την ισότητα

$$(x^2 - 6x + 8)P(x) = (x^2 + 2x)P(x-2),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Πρόβλημα 2

Βρείτε τις τιμές του ακέραιου αριθμού n για τις οποίες ο αριθμός $A = \frac{8n-25}{n+5}$ ισούται με τον κύβο ρητού αριθμού.

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε μια $n \times n$ σκακίερα, όπου n άρτιος θετικός ακέραιος, στην οποία τοποθετούνται όλοι οι αριθμοί $1, 2, 3, \dots, n^2$, ένας σε κάθε τετραγωνάκι. Καλούμε S_1 το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται στα άσπρα τετράγωνα και S_2 το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται στα μαύρα τετράγωνα. Να βρεθούν όλοι οι αριθμοί n που είναι τέτοιοι, ώστε να είναι δυνατή μία τοποθέτηση, για την οποία ισχύει:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{39}{64}.$$

Πρόβλημα 4

Δίνεται κύκλος $c(O, R)$ (με κέντρο το σημείο O και ακτίνα R) και δύο σημεία του A, B τέτοια, ώστε $R < AB < 2R$. Ο κύκλος $c_1(A, r)$ (με κέντρο το σημείο A και ακτίνα r , $0 < r < R$), τέμνει τον κύκλο $c(O, R)$, στα σημεία C και D (το σημείο C ανήκει στο μικρό τόξο AB). Από το σημείο B , θεωρούμε τις εφαπτόμενες BE και BF στον κύκλο $c_1(A, r)$, έτσι ώστε από τα σημεία επαφής E, F , το σημείο E βρίσκεται εκτός του κύκλου $c(O, R)$. Οι ευθείες EC και DF τέμνονται στο σημείο M . Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $BCFM$ είναι εγγράψιμο.

Διάρκεια εξέτασης 4 ώρες.

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Καλή επιτυχία!

Ενδεικτικές λύσεις θεμάτων μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1

Βρείτε όλα τα πολυώνυμα $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές που ικανοποιούν την ισότητα

$$(x^2 - 6x + 8)P(x) = (x^2 + 2x)P(x-2),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

Η δεδομένη ισότητα γράφεται στη μορφή

$$(x-2)(x-4)P(x) = x(x+2)P(x-2), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

οπότε, για $x=0, -2$ και 4 προκύπτουν οι ισότητες: $P(0) = P(-2) = P(2) = 0$.

Επομένως το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντες τους $x, x+2$ και $x-2$, οπότε έχουμε:

$$P(x) = x(x+2)(x-2)Q(x), \quad (2)$$

όπου το $Q(x)$ είναι πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές.

Λόγω της (2) η σχέση (1) γίνεται:

$$(x-2)(x-4)^2 x(x+2)Q(x) = x(x+2)(x-2)x(x-4)Q(x-2), \quad (3)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ισοδύναμα, έχουμε

$$x(x+2)(x-2)(x-4)[(x-2)Q(x) - xQ(x-2)] = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Από τη σχέση (4), επειδή το πολυώνυμο $x(x-2)(x+2)(x-4)$ δεν είναι το μηδενικό πολυώνυμο, προκύπτει η ισότητα:

$$(x-2)Q(x) - xQ(x-2) = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Από την τελευταία σχέση για $x=0$ λαμβάνουμε ότι $Q(0)=0$, οπότε $Q(x) = xR(x)$, όπου $R(x)$ πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές. Λόγω της (5) η σχέση (4) γίνεται:

$$\begin{aligned} (x-2)xR(x) - x(x-2)R(x-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x-2)[R(x) - R(x-2)] &= 0, \end{aligned}$$

από την οποία, αφού $x(x-2) \neq 0(x)$, προκύπτει ότι:

$$R(x) = R(x-2), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $R(x) = R(x+2k)$, $k \in \mathbb{Z}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε το πολυώνυμο $R(x)$ παίρνει την ίδια τιμή για άπειρες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, για παράδειγμα ισχύει $c = R(0) = R(2k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Άρα είναι $R(x) = c$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε

$$P(x) = x(x+2)(x-2)Q(x) = x(x+2)(x-2)xR(x) = cx^2(x^2 - 4).$$

Πρόβλημα 2

Βρείτε τις τιμές του ακέραιου αριθμού n για τις οποίες ο αριθμός $A = \frac{8n-25}{n+5}$ ισούται με τον κύβο ρητού αριθμού.

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Έστω $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, με $(p, q) = 1$ και τέτοιοι ώστε

$$A = \frac{8n-25}{n+5} = \left(\frac{p}{q}\right)^3. \quad (1)$$

Τότε θα είναι και $(p^3, q^3) = 1$, ενώ από τη σχέση (1) λαμβάνουμε:

$$q^3(8n-25) = p^3(n+5), \quad (2)$$

από την οποία έπεται ότι

$$p^3 \mid (8n-25) \text{ και } q^3 \mid (n+5) \Rightarrow \text{υπάρχει } k \in \mathbb{Z} \text{ έτσι ώστε:}$$

$$8n-25 = kp^3 \text{ και } n+5 = kq^3. \quad (3)$$

Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $8n-25 = kp^3$, $k \in \mathbb{Z}$, τότε από τη σχέση (2) λαμβάνουμε τις σχέσεις (3). Από τις σχέσεις (3) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} 8(n+5) - (8n-25) &= k(8q^3 - p^3) \\ \Rightarrow k(2q-p)(4q^2 + 2qp + p^2) &= 65. \end{aligned}$$

Επομένως οι αριθμοί k , $2q-p$ και $4q^2 + 2qp + p^2$ είναι διαιρέτες του 65. Παρατηρούμε όμως ότι $4q^2 + 2pq + p^2 = 3q^2 + (p+q)^2 \equiv 1 \pmod{3}$ και επιπλέον ισχύει $4q^2 + 2pq + p^2 = 3q^2 + (p+q)^2 \geq 3$, οπότε, αφού ο αριθμός $4q^2 + 2pq + p^2$ είναι διαιρέτης του 65 η μοναδική δυνατή τιμή του είναι

$$4q^2 + 2pq + p^2 = 13 \Leftrightarrow 3q^2 + (p+q)^2 = 13,$$

οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

- $4q^2 + 2qp + p^2 = 13$, $k = \pm 1$, $2q - p = \pm 5$. Τότε έχουμε:

$$p = 2q \mp 5 \text{ και } 4q^2 + 2q(2q \mp 5) + (2q \mp 5)^2 = 13 \Leftrightarrow p = 2q \mp 5, \quad 2q^2 \mp 5q + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow p = 2q \mp 5, \quad q = \pm 2 \Leftrightarrow p = \mp 1, \quad q = \pm 2. \text{ Τότε και για τις δύο περιπτώσεις έχουμε}$$

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3 = -\frac{1}{8}, \text{ οπότε θα είναι: } \frac{8n-25}{n+5} = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow 8(8n-25) = -(n+5) \Leftrightarrow n = 3.$$

2^{ος} τρόπος

Όπως στον πρώτο τρόπο φθάνουμε στη σχέση (2) και τη λύνουμε ως προς n , οπότε λαμβάνουμε:

$$n = \frac{5(5q^3 + p^3)}{8q^3 - p^3}. \quad (4)$$

Έστω $d = (5q^3 + p^3, 8q^3 - p^3)$. Τότε $d \mid 5q^3 + p^3 + 8q^3 - p^3 = 13q^3$ και αφού $(p, q) = 1$ έπεται ότι $d \mid 13$. Επομένως

$$\frac{8q^3 - p^3}{d} \mid 5 \Rightarrow (8q^3 - p^3) \mid 5 \cdot 13 \Rightarrow (2q - p)(4q^2 + 2pq + p^2) \mid 65.$$

Παρατηρούμε ότι $4q^2 + 2pq + p^2 = 3q^2 + (p+q)^2 \equiv 1 \pmod{3}$ και επιπλέον ισχύει $4q^2 + 2pq + p^2 = 3q^2 + (p+q)^2 \geq 3$, οπότε, αφού ο αριθμός $4q^2 + 2pq + p^2$ είναι διαιρέτης του 65 η μοναδική δυνατή τιμή του είναι

$$4q^2 + 2pq + p^2 = 13 \Leftrightarrow 3q^2 + (p+q)^2 = 13. \quad (5)$$

Από τη σχέση (5) προκύπτει ότι $|q| \leq 2$, οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $|q| = 0$ ή $|q| = 1$, οπότε $(p+q)^2 = 13$ ή $(p+q)^2 = 10$, αδύνατες με $p, q \in \mathbb{Z}$.
- Αν $|q| = 2$, τότε $(p+q)^2 = 1$, από την οποία προκύπτουν οι λύσεις:

$$(p, q) = (-1, 2) \text{ ή } (p, q) = (1, -2) \text{ ή } (p, q) = (-3, 2) \text{ ή } (p, q) = (3, -2).$$

Επειδή $(2q-p) \mid 65$, δεκτές είναι μόνο οι λύσεις $(p, q) = (-1, 2)$ ή $(p, q) = (1, -2)$, από τις οποίες προκύπτει ότι $n = 3$.

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε μια $n \times n$ σκακιέρα, όπου n άρτιος θετικός ακέραιος, στην οποία τοποθετούνται όλοι οι αριθμοί $1, 2, 3, \dots, n^2$, ένας σε κάθε τετραγωνάκι. Καλούμε S_1 το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται στα άσπρα τετράγωνα και S_2 το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται στα μαύρα τετράγωνα. Να βρεθούν όλοι οι αριθμοί n που είναι τέτοιοι, ώστε να είναι δυνατή μία τοποθέτηση, για την οποία ισχύει:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{39}{64}.$$

Λύση

Η δεδομένη σχέση είναι ισοδύναμη με την $S_1 = \frac{39}{103}(S_1 + S_2)$. Παρατηρούμε ότι :

$$S_1 + S_2 = 1 + 2 + \dots + n^2 = \frac{n^2(n^2 + 1)}{2}$$

Επειδή ο S_1 είναι φυσικός αριθμός, από τις παραπάνω θα έχουμε ότι

$$103 \left| \left(\frac{n^2(n^2 + 1)}{2} \right) \right|. \text{ Όμως ο } 103 \text{ είναι πρώτος της μορφής } 4k+3, \text{ οπότε ο } 103 \text{ δεν}$$

διαιρεί τον $n^2 + 1$. Επομένως πρέπει να διαιρεί τον n^2 και αφού είναι πρώτος, πρέπει $103 \mid n$. Αφού επιπλέον ο n είναι άρτιος, θα έχουμε ότι είναι πολλαπλάσιο του 206, δηλαδή πρέπει: $n = 206k, k \in \mathbb{N}^*$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι για κάθε πολλαπλάσιο του 206 είναι δυνατή μια τέτοια τοποθέτηση. Η ελάχιστη δυνατή τιμή του S_1 είναι:

$$1 + 2 + \dots + \frac{n^2}{2} = \frac{\frac{n^2}{2} \left(\frac{n^2}{2} + 1 \right)}{2} = A,$$

ενώ η μέγιστη τιμή είναι:

$$\left(\frac{n^2}{2} + 1 \right) + \left(\frac{n^2}{2} + 1 \right) + \dots + n^2 = B.$$

Εύκολα ελέγχουμε την ανισότητα,

$$A < S_1 = \frac{39}{103}(S_1 + S_2) < B$$

Τώρα θα πάρουμε το ζητούμενο δείχνοντας ότι το S_1 μπορεί να πάρει κάθε δυνατή τιμή ανάμεσα στα A, B . Πράγματι, ο αριθμός $A+1$ μπορεί να επιτευχθεί επιλέγοντας στα άσπρα τετράγωνα τους αριθμούς $1, 2, \dots, \frac{n^2}{2}-1, \frac{n^2}{2}+1$. Ο αριθμός $A+2$ μπορεί να επιτευχθεί επιλέγοντας στα άσπρα τετράγωνα τους αριθμούς $1, 2, \dots, \frac{n^2}{2}-1, \frac{n^2}{2}+2$, και ούτω καθεξής. Όταν φτάσουμε στο βήμα όπου χρειάζεται η τοποθέτηση των αριθμών $1, 2, \dots, \frac{n^2}{2}-1, n^2$, για να πάρουμε τον επόμενο αριθμό ως άθροισμα, θα επιλέξουμε στα άσπρα τετράγωνα τους αριθμούς $1, 2, \dots, \frac{n^2}{2}-2, \frac{n^2}{2}, n^2$, και στον επόμενο τους $1, 2, \dots, \frac{n^2}{2}-2, \frac{n^2}{2}+1, n^2$, και ούτω καθεξής. Αυξάνοντας λοιπόν με την παραπάνω διαδικασία το άθροισμα κατά 1, ξεκινώντας από το A , μπορούμε να κατασκευάσουμε όλους τους αριθμούς μέχρι το B .

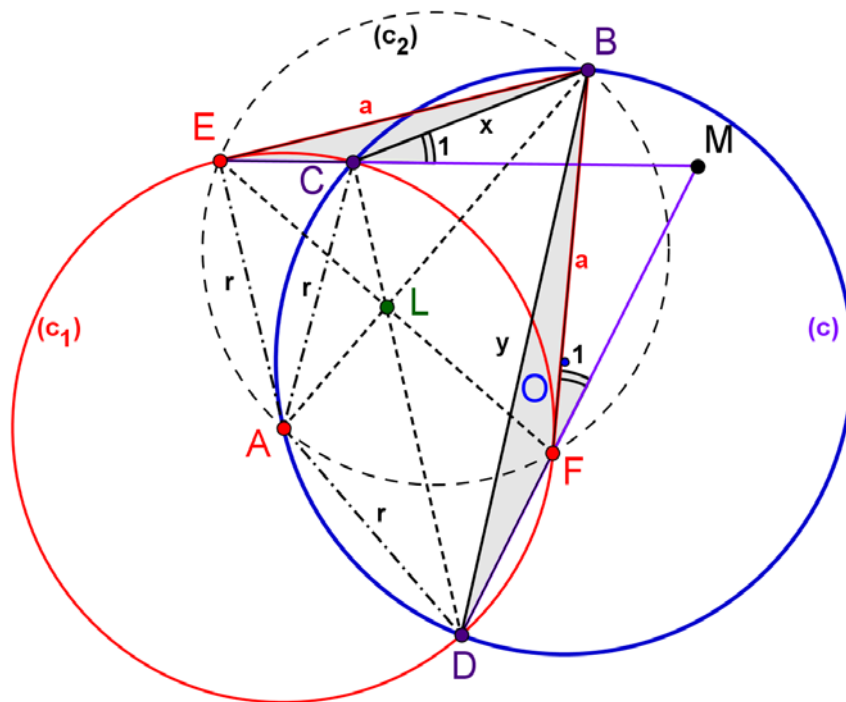
Πρόβλημα 4

Δίνεται κύκλος $c(O, R)$ (με κέντρο το σημείο O και ακτίνα R) και δύο σημεία του A, B τέτοια, ώστε $R < AB < 2R$. Ο κύκλος $c_1(A, r)$ (με κέντρο το σημείο A και ακτίνα r , $0 < r < R$), τέμνει τον κύκλο $c(O, R)$, στα σημεία C και D (το σημείο C ανήκει στο μικρό τόξο AB). Από το σημείο B , θεωρούμε τις εφαπτόμενες BE και BF στον κύκλο $c_1(A, r)$, έτσι ώστε από τα σημεία επαφής E, F , το σημείο E βρίσκεται εκτός του κύκλου $c(O, R)$. Οι ευθείες EC και DF τέμνονται στο σημείο M . Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $BCFM$ είναι εγγράψιμο.

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Το τετράπλευρο $AEBF$ είναι εγγράψιμο (διότι οι BE και BF είναι εφαπτόμενες, οπότε: $\hat{AEB} = \hat{AFB} = 90^\circ$) και έστω c_2 ο περιγεγραμμένος κύκλος του. Το τμήμα CD είναι η κοινή χορδή των κύκλων (c) και (c_1) . Το τμήμα AB είναι η κοινή χορδή των κύκλων (c) και (c_2) . Το τμήμα EF είναι η κοινή χορδή των κύκλων (c_1) και (c_2) . Άρα οι τρεις παραπάνω χορδές θα συντρέχουν στο ριζικό κέντρο, έστω L , των τριών κύκλων.

Η AB είναι διχοτόμος της γωνίας \hat{EBF} (διότι BE και BF είναι εφαπτόμενες του κύκλου $c_1(A, r)$). Η AB είναι επίσης διχοτόμος της γωνίας \hat{CBD} , γιατί οι γωνίες \hat{ABC} και \hat{ABD} είναι εγγεγραμμένες στο κύκλο $c(O, R)$ και βαίνουν στα ίσα τόξα \widehat{AC} και \widehat{AD} . Άρα οι γωνίες \hat{EBC} και \hat{FBD} είναι ίσες.



Σχήμα 2

Με τη βοήθεια της ισότητας $\hat{EBC} = \hat{FBD}$, θα αποδείξουμε ότι τα τρίγωνα BCE και BFD είναι όμοια. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{BC}{BE} = \frac{BF}{BD} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{y}{a} \Leftrightarrow xy = a^2,$$

όπου θέσαμε (χάρην συντομίας): $BE = BF = a$, $BC = x$ και $BD = y$.

Από την ομοιότητα των τριγώνων LCB και LAD έχουμε:

$$\frac{LC}{LA} = \frac{CB}{AD} \Rightarrow \frac{LC}{LA} = \frac{x}{r} \quad (1).$$

Από την ομοιότητα των τριγώνων LCA και LBD , έχουμε:

$$\frac{LB}{LC} = \frac{BD}{CA} \Rightarrow \frac{LB}{LC} = \frac{y}{r} \quad (2).$$

Πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{LB}{LA} = \frac{xy}{r^2} \quad (A).$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABE , το τμήμα AL είναι το ύψος προς την υποτείνουσα, άρα:

$$\frac{LB}{LA} = \frac{EB^2}{EA^2} = \frac{a^2}{r^2} \quad (B).$$

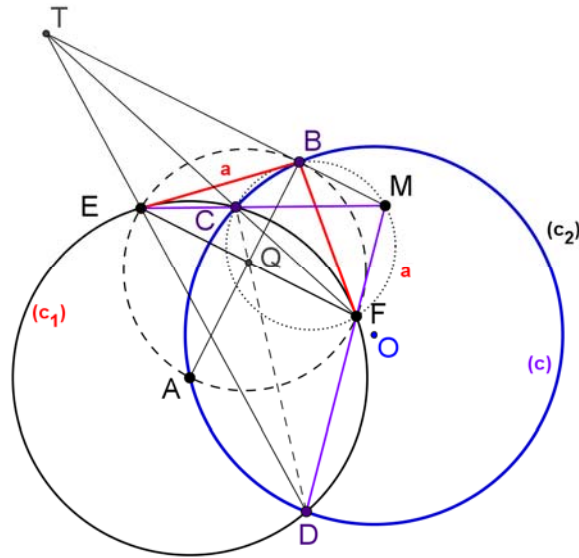
Από τις σχέσεις (A) και (B) έχουμε: $xy = a^2$.

Άρα τα τρίγωνα BCE και BFD είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις γωνίες τους ίσες (μία προς μία). Από τις ισότητες των γωνιών των τριγώνων BCE και BFD , προκύπτει η ισότητα: $\hat{C} = \hat{F}$. Άρα το τετράπλευρο $BCFM$ είναι εγγράψιμο.

2^{ος} τρόπος.

Σημειώνουμε με Q το σημείο τομής των EF, CD . Από το **θεώρημα Pascal** στο εκφυλισμένο εξάγωνο $EEDFFC$ παίρνουμε ότι, αν T είναι το σημείο τομής των

ED, CF , τότε τα σημεία T, B, M είναι συνευθειακά. Επιπλέον, στο εγγεγραμμένο $ECFD$, τα σημεία T, M είναι τα σημεία τομής των απέναντι πλευρών και το Q είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του. Επομένως η ευθεία TM είναι η **πολική** του Q , οπότε η AQ είναι κάθετη στην πολική (αφού A κέντρο του κύκλου), οπότε έχουμε ότι $\hat{A}BT = 90^\circ$. Έτσι, έπεται ότι $EF \parallel TM$ αφού $AB \perp EF$, οπότε έχουμε ότι $\hat{B}MC = \hat{M}EF = \hat{C}FB$, όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από τις γωνίες χορδής και εφαπτομένης.



Σχήμα 3

Παρατήρηση

Από τις ισότητες των γωνιών των τριγώνων BCE και BFD , προκύπτει επίσης ότι και το τετράπλευρο $BEDM$ είναι εγγράψιμο.