ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΒΑΣΗΣ 2024

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (37)

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: ΔΕΥΤΕΡΑ, 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024

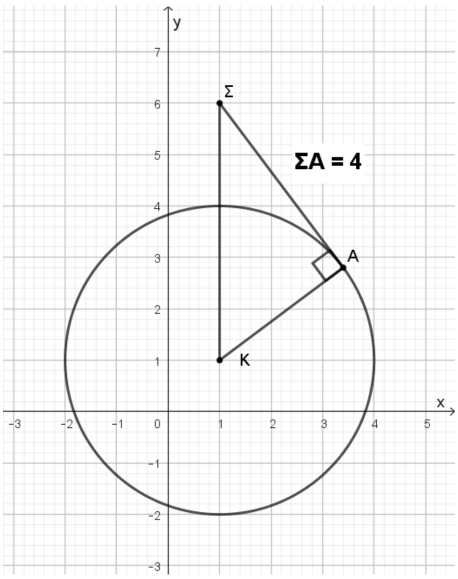
8:00-11:00

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Α1.	Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το σημείο $K(1,1)$, αν το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος που άγεται από το σημείο $\Sigma(1,6)$ προς τον κύκλο είναι ίσο με 4 μονάδες.

Λύση:

<u>Ά τρόπος:</u> (Γεωμετρικός)



Η εξίσωση του ζητούμενου κύκλου έχει την μορφή:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$$

Αφού το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο $K(1,1)$, έπεται ότι:

$$\alpha=\beta=1$$

Υπολογίζουμε την απόσταση:

$$\Sigma K=|y_\Sigma-y_K|=|6-1|=5\ \mu o\nu.$$

Εναλλακτικά για την απόσταση:

$$\Sigma K = \sqrt{(x_\Sigma - x_K)^2 + (y_\Sigma - y_K)^2} = \sqrt{(1-1)^2 + (6-1)^2} = 5\ \mu o \nu.$$

Το τρίγωνο $K A \Sigma$, όπου A το σημείο επαφής, είναι ορθογώνιο. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε ότι:

$$(\Sigma K)^2 = (\Sigma A)^2 + (KA)^2$$

$$\Rightarrow 5^2 = 4^2 + R^2$$

$$\Rightarrow 25 = 16 + R^2$$

$$\Rightarrow R^2 = 9$$

$$\Rightarrow R = 3\ \mu o \nu.$$

Έτσι η ζητούμενη εξίσωση παίρνει την μορφή:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 3^2$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 9$$

<u>Β τρόπος: </u>(Αλγεβρικός)

Η εξίσωση του ζητούμενου κύκλου έχει την μορφή:

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

Αφού το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο $K(1,1)$, έπεται ότι:

$$-g = 1 \Rightarrow g = -1,$$

$$-f = 1 \Rightarrow f = -1$$

Το μήκος, (ΣA), του εφαπτόμενου προς τον κύκλο τμήματος, δίνεται από τον τύπο:

$$(\Sigma A) = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}$$

$$\Rightarrow 4 = \sqrt{1^2 + 6^2 + 2 \cdot (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \cdot 6 + c}$$

$$\Rightarrow 4 = \sqrt{1 + 36 - 2 - 12 + c}$$

$$\Rightarrow 4 = \sqrt{23 + c}$$

$$\Rightarrow 16 = 23 + c$$

$$\Rightarrow c = -7$$

Έτσι η εξίσωση του κύκλου είναι:

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$$

Α2.	Να βρείτε το ολοκλήρωμα: $$\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx$$
	Λύση: Αρχικά, αναλύουμε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα: $$\frac{1}{x(x-1)^2}$$ Έχουμε: $$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{\Gamma}{(x-1)^2}$$ $$\Longrightarrow 1\equiv A(x-1)^2+Bx(x-1)+\Gamma x$$ Δίνοντας τιμές στο x παίρνουμε: Για $x=0 \Longrightarrow 1=A$ Για $x=1 \Longrightarrow 1=\Gamma$ Εξισώνουμε συντελεστές ίσων δυνάμεων του x στα δύο μέλη: Συντελεστής x^2: $0=A+B \Longrightarrow B=-A=-1$ Άρα το αρχικό κλάσμα γράφεται ως: $$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$ Ολοκληρώνουμε για να πάρουμε: $$\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx=\int\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right]dx=\int\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+(x-1)^{-2}\right]dx$$ $$=ln\|x\|-ln\|x-1\|+\frac{(x-1)^{-1}}{-1}+c$$ $$=ln\|x\|-ln\|x-1\|-\frac{1}{x-1}+c$$
Α3.	Να χαρακτηρίσετε τον πιο κάτω ισχυρισμό ως ΟΡΘΟ ή ΛΑΘΟΣ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. «Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα $\Delta \subset \mathbb{R}$, τότε ισχύει ότι $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ»
	Λύση: Ο ισχυρισμός αυτός είναι **ΛΑΘΟΣ** Αντιπαράδειγμα:

	Θεωρούμε την συνάρτηση $$f(x) = x^3, \qquad x \epsilon \mathbb{R}$$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της. Παρατηρούμε όμως ότι: $$f'(x) = 3x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$ Με την ισότητα να ισχύει για $x = 0$ $$f'(0) = 0$$
Α4.	Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow (0,+\infty)$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για την οποία ισχύει ότι το σημείο $A(0,1)$ ανήκει στη γραφική της παράσταση. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f, αν η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης έχει κλίση: $$\lambda(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
	Λύση: Από τα δεδομένα της άσκησης συμπεραίνουμε ότι: $$A(0,1) \Rightarrow f(0) = 1$$ Επίσης η κλίση της εφαπτομένης ισούται με την παράγωγο της συνάρτησης, δηλαδή: $$f'(x) = \lambda(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$ $$\Rightarrow f'(x)f(x) = e^{2x}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$ $$\Rightarrow \int f'(x)f(x)dx = \int e^{2x}\,dx$$ $$\Rightarrow \int f(x)d[f(x)] = \int e^{2x}\,dx$$ $$\Rightarrow \frac{f^2(x)}{2} = \frac{e^{2x}}{2} + c$$ $$f(0) = 1 \Rightarrow \frac{f^2(0)}{2} = \frac{e^0}{2} + c \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + c \Rightarrow c = 0$$ Επομένως: $$\Rightarrow \frac{f^2(x)}{2} = \frac{e^{2x}}{2} \Leftrightarrow f^2(x) = e^{2x} \Leftrightarrow f(x) = \pm e^x$$

Επειδή:

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow(0,+\infty)$$

έχουμε ότι

$$f(x)=e^x$$

A5. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \tau o\xi\eta\mu t\,dt}{\sigma\upsilon\nu x-1}$$

Λύση:

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\int_0^x \tau o\xi\eta\mu t\,dt=\int_0^0 \tau o\xi\eta\mu t\,dt=0,$$

γιατί η συνάρτηση

$$F(x)=\int_0^x \tau o\xi\eta\mu t\,dt$$

είναι συνεχής στο $x=0$

$$\lim_{x\to 0}(\sigma\upsilon\nu x-1)=1-1=0$$

Άρα, έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

Εξετάζουμε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x \tau o\xi\eta\mu t\,dt\right)'}{(\sigma\upsilon\nu x-1)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\tau o\xi\eta\mu x}{-\eta\mu x}$$

$$\lim_{x\to 0}\tau o\xi\eta\mu x=0$$

$$\lim_{x\to 0}(-\eta\mu x)=0$$

Άρα, πάλι καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

Εξετάζουμε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\tau o\xi\eta\mu x)'}{(-\eta\mu x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-\sigma\upsilon\nu x}=\frac{\frac{1}{1}}{-1}=-1$$

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος De L' Hospital, άρα

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \tau o\xi\eta\mu t\,dt}{\sigma\upsilon\nu x-1}=-1$$

A6. Θεωρούμε το χωρίο που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και περικλείεται από τη γραφική παράσταση της παραβολής

$$f(x) = (x+2)^2,$$

την ευθεία $y = 9$ και τον άξονα των τεταγμένων. Να υπολογίσετε:

(α) το εμβαδόν του πιο πάνω χωρίου

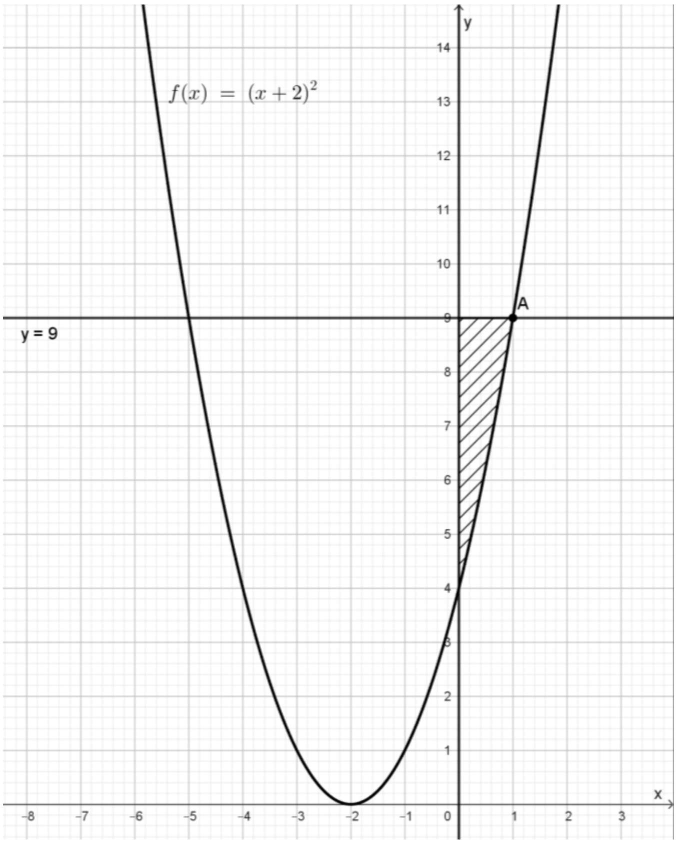
(μονάδες 2)

(β) τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή του πιο πάνω χωρίου γύρω από τον άξονα των τεταγμένων.

(μονάδες 3)

Λύση:

Κατασκευάζουμε τις γραφικές παραστάσεις της παραβολής και της ευθείας, όπως φαίνεται στο σχήμα.



(α) Βρίσκουμε το σημείο τομής ευθείας – παραβολής, A, στο 1ο τεταρτημόριο.

$$\left\{\begin{matrix} f(x) = (x+2)^2 \\ y = 9 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (x+2)^2 = 9$$

$$\Rightarrow x + 2 = \pm 3$$

Επειδή το A είναι στο 1ο τεταρτημόριο, παίρνουμε:

$$x + 2 = 3 \Longrightarrow x = 1$$

$$\Longrightarrow A(1,9)$$

$$E = \int_0^1 (y_\varepsilon - y_\kappa)dx = \int_0^1 \big(9 - f(x)\big)dx = \int_0^1 (9 - (x+2)^2)dx$$

$$= \left[9x - \frac{(x+2)^3}{3}\right]_0^1 = 9 - \frac{3^3}{3} - \left(0 - \frac{2^3}{3}\right) = 9 - 9 + \frac{8}{3} = \frac{8}{3}\ \tau.\mu.$$

<u>Β τρόπος:</u>

Λύνουμε τον τύπο της παραβολής ως προς x

$$y = (x+2)^2 \Leftrightarrow x + 2 = \pm\sqrt{y}$$

Για τον δεξί κλάδο της παραβολής ισχύει ότι:

$$x + 2 = \sqrt{y} \Leftrightarrow x = \sqrt{y} - 2$$

Σημείο τομής παραβολής με άξονα τεταγμένων:

$$x = 0 \Longrightarrow y = f(0) = (0+2)^2 = 4$$

$$\Longrightarrow (0,4)$$

$$E = \int_4^9 x dy = \int_4^9 (\sqrt{y} - 2)dy = \int_4^9 \left(y^{\frac{1}{2}} - 2\right)dy$$

$$= \left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - 2y\right]_4^9 = \frac{2}{3}\cdot 9^{\frac{3}{2}} - 2\cdot 9 - \frac{2}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}} + 2\cdot 4 = \frac{2}{3}\cdot 27 - 18 - \frac{2}{3}\cdot 8 + 8$$

$$18 - 18 - \frac{16}{3} + 8 = \frac{8}{3}\ \tau.\mu.$$

(β) Λύνουμε τον τύπο της παραβολής ως προς x

$$y = (x+2)^2 \Leftrightarrow x + 2 = \pm\sqrt{y}$$

Για τον δεξί κλάδο της παραβολής ισχύει ότι:

$$x + 2 = \sqrt{y} \Leftrightarrow x = \sqrt{y} - 2$$

Σημείο τομής παραβολής με άξονα τεταγμένων:

$$x = 0 \Longrightarrow y = f(0) = (0+2)^2 = 4$$

$$\Longrightarrow (0,4)$$

	Ο όγκος του παραγόμενου στερεού είναι: $$V_y = \pi \int_4^9 x^2\,dy = \pi \int_4^9 \left(\sqrt{y}-2\right)^2 dy = \pi \int_4^9 \left(\left(\sqrt{y}\right)^2 - 4\sqrt{y} + 4\right) dy$$ $$= \pi \int_4^9 \left(y - 4y^{\frac{1}{2}} + 4\right) dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} - \frac{4y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 4y\right]_4^9$$ $$= \pi \left[\frac{y^2}{2} - \frac{8y^{\frac{3}{2}}}{3} + 4y\right]_4^9 = \pi \left[\frac{9^2}{2} - \frac{8\cdot 9^{\frac{3}{2}}}{3} + 4\cdot 9 - \left(\frac{4^2}{2} - \frac{8\cdot 4^{\frac{3}{2}}}{3} + 4\cdot 4\right)\right]$$ $$= \pi\left(\frac{81}{2} - 8\cdot\frac{27}{3} + 36 - 8 + \frac{8\cdot 8}{3} - 16\right) = \pi\left(\frac{81}{2} - 8\cdot 9 + 36 - 8 + \frac{64}{3} - 16\right)$$ $$= \left(\frac{81}{2} - 60 + \frac{64}{3}\right)\pi = \frac{11}{6}\pi\ \ \kappa.\mu.$$
Α7.	Δίνεται συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει: $$f''(x) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$ (α) Να αποδείξετε ότι: $$\int f(x)\eta\mu x\,dx = \frac{f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x}{2} + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$ **(μονάδες 3)** (β) Χρησιμοποιώντας το πιο πάνω αποτέλεσμα ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο να βρείτε το ολοκλήρωμα: $$\int e^{-x}\eta\mu x\,dx$$ **(μονάδες 2)**
	Λύση: (α) <u>Α Τρόπος:</u> $$\int f(x)\cdot\eta\mu x\,dx = \int f(x)d(-\sigma\upsilon\nu x) = f(x)(-\sigma\upsilon\nu x) - \int f'(x)(-\sigma\upsilon\nu x)dx$$ $$= -f(x)\sigma\upsilon\nu x + \int f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx = -f(x)\sigma\upsilon\nu x + \int f'(x)d(\eta\mu x)$$ $$= -f(x)\sigma\upsilon\nu x + f'(x)\eta\mu x - \int f''(x)\eta\mu x dx$$

$$= f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x - \int f(x)\eta\mu x dx$$

Άρα,

$$\int f(x)\cdot \eta\mu x\, dx = f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x - \int f(x)\eta\mu x dx$$

$$\Longrightarrow 2\int f(x)\cdot \eta\mu x\, dx = f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x$$

$$\Longrightarrow \int f(x)\cdot \eta\mu x\, dx = \frac{f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x}{2} + c$$

<u>Β Τρόπος:</u>

$$\int f(x)\cdot \eta\mu x\, dx = \int f''(x)\cdot \eta\mu x\, dx = \int \eta\mu x d\big(f'(x)\big)$$

$$= f'(x)\eta\mu x - \int f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx = f'(x)\eta\mu x - \int \sigma\upsilon\nu x d\big(f(x)\big)$$

$$= f'(x)\eta\mu x - \left[f(x)\sigma\upsilon\nu x - \int f(x)(-\eta\mu x)dx\right]$$

$$= f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x - \int f(x)\eta\mu x dx$$

Άρα,

$$\int f(x)\cdot \eta\mu x\, dx = f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x - \int f(x)\eta\mu x dx$$

$$\Longrightarrow 2\int f(x)\cdot \eta\mu x\, dx = f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x$$

$$\Longrightarrow \int f(x)\cdot \eta\mu x\, dx = \frac{f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x}{2} + c$$

<u>Γ Τρόπος:</u>

$$\left(\frac{f'(x)\cdot \eta\mu x - f(x)\cdot \sigma\upsilon\nu x}{2} + c\right)'$$

$$= \frac{1}{2}\cdot [f''(x)\eta\mu x + f'(x)\sigma\upsilon\nu x - f'(x)\sigma\upsilon\nu x - f(x)\cdot(-\eta\mu x)]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot [f''(x)\eta\mu x + f(x)\eta\mu x] = \frac{1}{2}\cdot [f(x)\eta\mu x + f(x)\eta\mu x]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot [2f(x)\eta\mu x] = f(x)\eta\mu x$$

	(β) Θέτουμε: $$f(x) = e^{-x}$$ Τότε: $$f'(x) = -e^{-x}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$ $$\Longrightarrow f''(x) = e^{-x} = f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$ Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η $f''(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Επομένως το ζητούμενο ολοκλήρωμα γράφεται ως: $$\int e^{-x} \cdot \eta\mu x \, dx = \int f(x)\eta\mu x \, dx$$ και άρα από το (α) ερώτημα, προκύπτει ότι: $$\int e^{-x} \cdot \eta\mu x \, dx = \int f(x)\eta\mu x \, dx = \frac{f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x}{2} + c$$ $$= \frac{-e^{-x}\eta\mu x - e^{-x}\sigma\upsilon\nu x}{2} + c = \frac{-e^{-x}(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)}{2} + c$$
Α8.	Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $$\int_0^1 x^2 dx$$
	Λύση: Χρησιμοποιούμε την διαμέριση: $\Delta_\nu = \{0 = x_0, x_1, x_2, \cdots\cdots, x_\nu = 1\}$, του διαστήματος $[0,1]$, όπου: $$\Delta x = \frac{\beta - \alpha}{\nu} = \frac{1-0}{\nu} = \frac{1}{\nu}$$ και $$x_\kappa = \alpha + \kappa \cdot \Delta_x = 0 + \kappa \cdot \frac{1}{\nu} = \frac{\kappa}{\nu}, \qquad \kappa = 0, 1, 2, \cdots\cdots, \nu.$$ Επίσης: $$f(x) = x^2$$ η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$.

Επιλέγουμε

$$\xi_\kappa = x_\kappa = \frac{\kappa}{\nu}, \qquad \kappa = 1, 2, \cdots\cdots, \nu$$

Άρα,

$$f(\xi_\kappa) = f(x_\kappa) = x_\kappa^2 = \left(\frac{\kappa}{\nu}\right)^2 = \frac{\kappa^2}{\nu^2}, \qquad \kappa = 1,2, \cdots\cdots, \nu$$

Ενώ

$$S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\cdot \Delta x = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{\kappa^2}{\nu^2}\cdot\frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu}\sum_{\kappa=1}^{\nu}\frac{\kappa^2}{\nu^2} = \frac{1}{\nu^3}(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots\nu^2)$$

$$= \frac{1}{\nu^3}\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} = \frac{(\nu+1)(2\nu+1)}{6\nu^2} = \frac{1}{6}\frac{(\nu+1)}{\nu}\frac{(2\nu+1)}{\nu}$$

$$= \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\left(2+\frac{1}{\nu}\right)$$

Άρα,

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{\nu\to+\infty} S_\nu = \lim_{\nu\to+\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\left(2+\frac{1}{\nu}\right) = \frac{1}{6}\cdot 2 = \frac{1}{3}$$

A9. Δίνεται συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β).

(α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g: [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$, με τύπο:

$$g(x) = f(x) - f(\alpha) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - a)$$

ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

(μονάδες 3)

(β) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

(μονάδες 2)

Λύση:

(α) Η συνάρτηση g είναι:

(i) Συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως πράξεις συνεχών
(ii) Παραγωγίσιμη στο (α, β) ως πράξεις παραγωγίσιμων

Επίσης ισχύει ότι:

$$g(\alpha) = f(\alpha) - f(\alpha) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(\alpha - a) = 0$$

και

$$g(\beta) = f(\beta) - f(\alpha) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(\beta - a)$$

$$= f(\beta) - f(\alpha) - f(\beta) + f(\alpha) = 0$$

Έτσι έχουμε ότι $g(\alpha) = g(\beta) = 0$.

Συμπεραίνουμε ότι η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

(β) Από το (α) ερώτημα το συμπέρασμα του θεωρήματος του Rolle μας εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιου ώστε:

$$g'(\xi) = 0$$

Παραγωγίζοντας την συνάρτηση g παίρνουμε:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

$$g'(\xi) = 0 \Longrightarrow f'(\xi) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

A10. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους:

$$f(x) = \eta\mu x,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{και} \quad g(x) = x - \eta\mu x,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

(α) Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς τα ακρότατα.

(μονάδες 1,5)

(β) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

(μονάδες 1)

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $(0, f(0))$ και $\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$. **(μονάδες 1)**

(δ) Χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι: **(μονάδες 1,5)**

	$$\frac{2x}{\pi} \leq \eta\mu x \leq x, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Λύση:

(α)

$$g(x) = x - \eta\mu x$$

$$\Longrightarrow g'(x) = 1 - \sigma\upsilon\nu x, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$g'(x) = 0 \Longrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 1 \Longrightarrow x = 0$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$	0	$+$	
$g(x)$	$O.E.$	$\nearrow$	$O.M.$

Η g παρουσιάζει ολικά ελάχιστη τιμή στο $x = 0$, το $g(0) = 0 - \eta\mu 0 = 0$

Η g παρουσιάζει ολικά μέγιστη τιμή στο $x = \frac{\pi}{2}$, το $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \eta\mu\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 1$

(β)

$$f(x) = \eta\mu x \Longrightarrow f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$$

$$\Longrightarrow f''(x) = -\eta\mu x \leq 0, \qquad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Άρα, η f είναι κοίλη στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(γ)

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{2} = 1$$

$$A(0, f(0)) = (0,0)$$

$$B\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$$

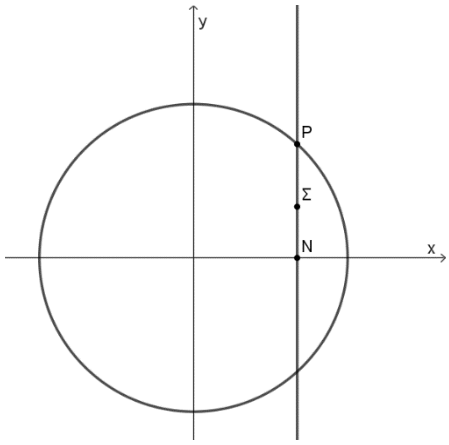
$$\lambda_{AB} = \frac{1-0}{\frac{\pi}{2} - 0} = \frac{2}{\pi}$$

Εξίσωση AB:

$$y - 0 = \frac{2}{\pi}(x - 0) \Longrightarrow y = \frac{2}{\pi}x$$

	(δ) Επειδή η f είναι κοίλη στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, από τον ορισμό της κυρτότητας έχουμε ότι: $$f(x) \geq y_{AB}, \forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$ $$\eta\mu x \geq \frac{2}{\pi}x, \forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$ Αφού η g παρουσιάζει ολικά ελάχιστη τιμή στο $x = 0$, το $g(0) = 0$ $$\Longrightarrow g(x) \geq 0, \forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$ $$\Longrightarrow x - \eta\mu x \geq 0, \forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$ $$\Longrightarrow \eta\mu x \leq x, \forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$ Συνδυάζοντας τα πιο πάνω προκύπτει ότι: $$\frac{2x}{\pi} \leq \eta\mu x \leq x, \quad \forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$
B1.	Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = \alpha^2$ και P τυχαίο σημείο του. Από το σημείο P φέρουμε ευθεία παράλληλη με τον άξονα των τεταγμένων, η οποία τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο N. Έστω Σ σημείο πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα PN τέτοιο ώστε: $$\frac{\Sigma N}{PN} = \frac{\beta}{\alpha} \text{ όπου } 0 < \beta < \alpha,\ \alpha,\beta \epsilon \mathbb{R}$$ (α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Σ καθώς το P κινείται πάνω στον κύκλο είναι η $$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$ **(μονάδες 5)** (β) Δίνεται το σύστημα των ανισώσεων: $$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq \alpha^2 \\ \dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} \geq 1, \ \ 0 < \beta < \alpha \end{cases}$$ Το χωρίο που περιγράφεται από το πιο πάνω σύστημα περιστρέφεται κατά π ακτίνια γύρω από των άξονα των τετμημένων. Να αποδείξετε ότι ο όγκος του παραγόμενου στερεού είναι ίσος με $$V = \frac{4}{3}\pi\alpha(\alpha^2 - \beta^2)\ \kappa.\mu.$$ **(μονάδες 5)**

Λύση:



(α)Έχουμε ότι

$$P(\alpha\sigma\upsilon\nu\theta, \alpha\eta\mu\theta), \qquad \theta\epsilon[0,2\pi)$$

και

$$x_P = x_\Sigma = x_N = \alpha\sigma\upsilon\nu\theta$$

Άρα οι συντεταγμένες των σημείων Σ και N είναι:

$$\Sigma(\alpha\sigma\upsilon\nu\theta, y_\Sigma) \text{ και } N(\alpha\sigma\upsilon\nu\theta, 0)$$

Έχουμε ότι: $(y_\Sigma, y_P\ \textit{ομόσημοι αριθμοί}, \textit{άρα}\ \frac{y_\Sigma}{\alpha\eta\mu\theta} > 0)$

$$\frac{\Sigma N}{PN} = \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{y_\Sigma}{\alpha\eta\mu\theta} = \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow y_\Sigma = \beta\eta\mu\theta$$

$$x_\Sigma = \alpha\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{x_\Sigma}{\alpha}$$

$$y_\Sigma = \beta\eta\mu\theta \Leftrightarrow \eta\mu\theta = \frac{y_\Sigma}{\beta}$$

Από την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1,$$

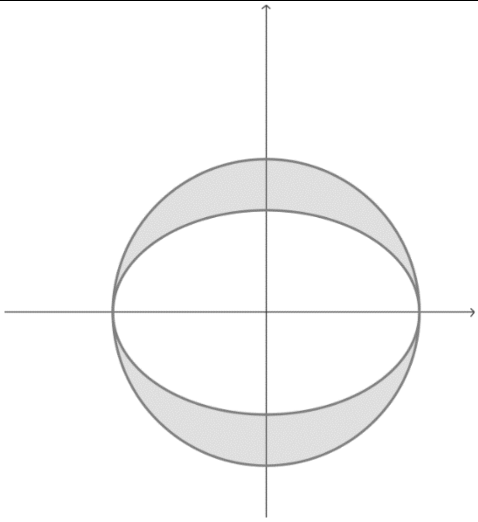
παίρνουμε

$$\left(\frac{x_\Sigma}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y_\Sigma}{\beta}\right)^2 = 1$$

Άρα η εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

(β)



Λύνουμε την πιο πάνω εξίσωση ως προς y^2

$$\beta^2 x^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha^2 - x^2)$$

Λόγω συμμετρίας του χωρίου ως προς τους άξονες των συντεταγμένων, έχουμε ότι ο ζητούμενος όγκος είναι ίσος με:

$$V = V_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma} - \frac{2\pi\beta^2}{\alpha^2}\int_0^\alpha (\alpha^2 - x^2)dx$$

$$= \frac{4}{3}\pi\alpha^3 - \frac{2\pi\beta^2}{\alpha^2}\left[\alpha^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^\alpha = \frac{4}{3}\pi\alpha^3 - \frac{2\pi\beta^2}{\alpha^2}\left[\alpha^3 - \frac{\alpha^3}{3}\right]$$

$$= \frac{4}{3}\pi\alpha^3 - \frac{2\pi\beta^2}{\alpha^2}\frac{2\alpha^3}{3} = \frac{4}{3}\pi\alpha^3 - \frac{4\pi\alpha\beta^2}{3}$$

$$= \frac{4}{3}\pi\alpha(\alpha^2 - \beta^2)\ \ \kappa.\mu.$$

<u>Β τρόπος (για όγκο σφαίρας):</u>

$$V_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma} = 2\pi\int_0^\alpha (\alpha^2 - x^2)dx = 2\pi\left[\alpha^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^\alpha = 2\pi\left[\alpha^3 - \frac{\alpha^3}{3}\right] = \frac{4}{3}\pi\alpha^3$$

Β2. Σε ένα Λύκειο επτά (7) τελειόφοιτοι μαθητές/τριες ενοικίασαν τέσσερα (4) διθέσια μηχανάκια.

(α) Να βρείτε με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν στα μηχανάκια οι επτά τελειόφοιτοι, αν:

i. σε κάθε θέση οδηγού πρέπει απαραίτητα να υπάρχει μαθητής/τρια
ii. η Αργυρώ και ο Δημήτρης ξέχασαν να φέρουν το δίπλωμα οδήγησής τους, άρα δεν μπορούν να καθίσουν σε θέση οδηγού.

(μονάδες 6)

(β) Δεδομένου ότι η Αργυρώ και ο Δημήτρης δεν μπορούν να καθίσουν σε θέση οδηγού, να βρείτε την πιθανότητα η Γεωργία και ο Μάριος να καθίσουν στο ίδιο μηχανάκι. **(μονάδες 4)**

Λύση:

(α) (i) Η τοποθέτηση των μαθητών/τριων στα μηχανάκια γίνεται σε δύο φάσεις. Στην 1η φάση από τους 7 μαθητές/τριες επιλέγουμε τους 4 για να τους τοποθετήσουμε στις θέσεις των οδηγών με $\varDelta_4^7$ τρόπους. Στη 2η φάση από τις 4 άδειες θέσεις επιλέγουμε τις 3 για να τοποθετήσουμε τους υπόλοιπους μαθητές. Αυτό γίνεται με $\varDelta_3^4$ τρόπους. Από την αρχή της απαρίθμησης ολόκληρη η διαδικασία μπορεί να γίνει με

$$\Delta_4^7 \cdot \Delta_3^4 = \frac{7!}{(7-4)!} \cdot \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{7!}{3!} \cdot \frac{4!}{1} = 20160$$

τρόπους.

Β τρόπος: $\binom{4}{1} \cdot 7! = 20160$

Γ τρόπος: $\Delta_7^8 - 4 \cdot 7! = 20160$

Δ τρόπος: $\binom{7}{2} \cdot 2 \cdot \binom{5}{2} \cdot 2 \cdot \binom{3}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 20160$

(ii) Εφόσον η Αργυρώ και ο Δημήτρης δεν μπορούν να καθίσουν σε θέσεις οδηγού απομένουν 5 άτομα από τα οποία μπορούμε να επιλέξουμε τους 4 για να τους τοποθετήσουμε στις θέσεις των οδηγών με Δ_4^5 τρόπους. Ακολούθως από τις 4 άδειες θέσεις επιλέγουμε τις 3 για να τοποθετήσουμε τους υπόλοιπους μαθητές. Αυτό γίνεται με Δ_3^4 τρόπους. Από την αρχή της απαρίθμησης ολόκληρη η διαδικασία μπορεί να γίνει με

$$\Delta_4^5 \cdot \Delta_3^4 = \frac{5!}{(5-4)!} \cdot \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{5!}{1!} \cdot \frac{4!}{1} = 120 \cdot 24 = 2880$$

τρόπους.

(β) Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Α: «η Γεωργία και ο Μάριος να καθίσουν στο ίδιο μηχανάκι»
Β: «η Αργυρώ και ο Δημήτρης δεν μπορούν να καθίσουν σε θέση οδηγού»

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{\binom{4}{1}\cdot 2 \cdot M_3 \cdot \Delta_2^3}{20160}}{\frac{2880}{20160}} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 6}{2880} = \frac{1}{10}$$

Από τα 4 μηχανάκια επιλέγουμε το 1 για να τοποθετήσουμε την Γεωργία και τον Μάριο με $\binom{4}{1}$ τρόπους. Τους μεταθέτουμε στο συγκεκριμένο μηχανάκι με 2! τρόπους. Εφόσον η Αργυρώ και ο Δημήτρης δεν μπορούν να καθίσουν σε θέση οδηγού, απομένουν 3 άτομα για να καθίσουν στις θέσεις των οδηγών με $M_3 = 3!$ τρόπους. Τέλος η Αργυρώ και ο Δημήτρης μπορούν να καθίσουν στα υπόλοιπα 3 καθίσματα με Δ_2^3 τρόπους. Άρα έχουμε συνολικά $\binom{4}{1} \cdot 2 \cdot M_3 \cdot \Delta_2^3$ τρόπους.

Β3. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4\alpha x,\ \alpha > 0$. Παίρνουμε σημεία Γ και Δ πάνω στην διευθετούσα της, με $y_\Gamma > 0$, έτσι ώστε η γωνία $\Gamma E \Delta$ να είναι ορθή, όπου E η εστία της παραβολής. Από τα Γ και Δ φέρουμε ευθείες παράλληλες προς τον άξονα της παραβολής, οι οποίες τέμνουν την παραβολή στα σημεία $A(\alpha t^2, 2\alpha t)$ και $B(\alpha\rho^2, 2\alpha\rho)$, αντίστοιχα.

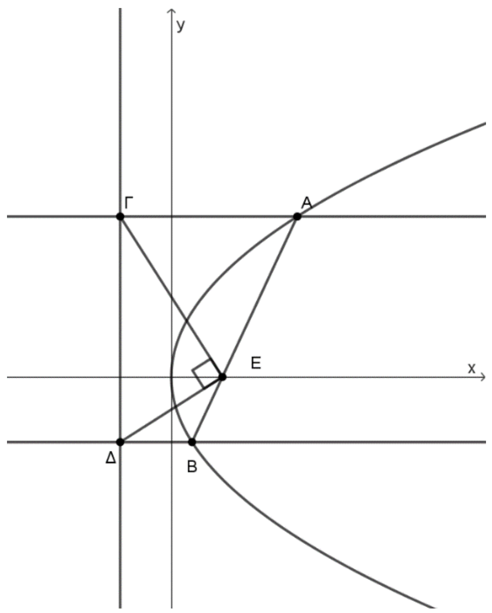
(α) Να αποδείξετε ότι η AB είναι εστιακή χορδή. **(μονάδες 4)**

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A έτσι ώστε το τραπέζιο $AB\Delta\Gamma$ να έχει ελάχιστον εμβαδόν. (Το εμβαδόν του τραπεζίου είναι $E = \frac{(\beta_1+\beta_2)\upsilon}{2}$)

(μονάδες 6)

Λύση:

(α)



Τα σημεία Γ και Δ έχουν συντεταγμένες $(-\alpha, 2\alpha t)$ και $(-\alpha, 2\alpha\rho)$ αντίστοιχα. Αφού η γωνία $\Gamma E \Delta = 90°$ έχουμε ότι

$$\Gamma E \perp \Delta E$$

$$\text{Άρα } \lambda_{\Gamma E} \cdot \lambda_{\Delta E} = -1$$

$$\lambda_{\Gamma E} = \frac{2\alpha t - 0}{-a - a} = \frac{2\alpha t}{-2a} = -t$$

$$\lambda_{\Delta E} = \frac{2\alpha\rho - 0}{-a - a} = \frac{2a\rho}{-2a} = -\rho$$

$$\Longrightarrow (-t) \cdot (-\rho) = -1 \Longrightarrow t \cdot \rho = -1 \Longrightarrow t = \frac{-1}{\rho}$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_{AE} &= \frac{2\alpha t}{at^2 - a} = \frac{2t}{t^2 - 1} = \frac{2\left(\frac{-1}{\rho}\right)}{\left(\frac{-1}{\rho}\right)^2 - 1} = \frac{-2\rho}{1 - \rho^2} = \frac{2\rho}{\rho^2 - 1} \\ \lambda_{BE} &= \frac{2\alpha\rho}{a\rho^2 - a} = \frac{2\rho}{\rho^2 - 1} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \lambda_{AE} = \lambda_{BE} \Longrightarrow AE || BE$$

Επειδή το E είναι κοινό σημείο συμπεραίνουμε ότι τα σημεία A, E, B είναι συνευθειακά και συνεπώς η AB είναι εστιακή χορδή.

<u>Β Τρόπος (για συνευθειακά):</u>

$$\lambda_{AB} = \frac{2\alpha t - 2\alpha\rho}{\alpha t^2 - a\rho^2} = \frac{2\alpha(t - \rho)}{\alpha(t^2 - \rho^2)} = \frac{2\alpha(t - \rho)}{\alpha(t - \rho)(t + \rho)} = \frac{2}{(t + \rho)}$$

Εξίσωση ευθείας AB:

$$y - 2\alpha t = \frac{2}{(t + \rho)}(x - \alpha t^2) \Longrightarrow (t + \rho)y - 2\alpha t^2 - 2\alpha t\rho = 2x - 2\alpha t^2$$

$$\Longrightarrow (t + \rho)y = 2x + 2\alpha t\rho$$

Η εστία την επαληθεύει, αφού

$$(t+\rho)\cdot 0 = 2\alpha + 2\alpha t\rho \Leftrightarrow t\rho = -1$$

που ισχύει από την καθετότητα των ΓE και ΔE. Άρα τα σημεία A, E, B είναι συνευθειακά και συνεπώς η AB είναι εστιακή χορδή.

(β) Το εμβαδόν του τραπεζίου $AB\Delta\Gamma$ είναι ίσο με

$$E = \frac{[(A\Gamma)+(B\Delta)]\cdot(\Gamma\Delta)}{2} = \frac{[(\alpha t^2 + a) + (\alpha\rho^2 + a)]\cdot 2\alpha(t-\rho)}{2}$$

Αφού $t\rho = -1 \Leftrightarrow \rho = -\frac{1}{t}$

$$\Rightarrow E(t) = \frac{1}{2}\left(\alpha t^2 + \frac{a}{t^2} + 2a\right)\cdot 2a\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

$$= a^2\cdot\left(t+\frac{1}{t}\right)^2\cdot\left(t+\frac{1}{t}\right) = a^2\cdot\left(t+\frac{1}{t}\right)^3$$

$$E'(t) = 3a^2\cdot\left(t+\frac{1}{t}\right)^2\cdot\left(1-\frac{1}{t^2}\right) = 0 \Rightarrow t^2 - 1 = 0 \ \Rightarrow t = \pm 1, t \neq 0$$ διπλή

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$E'(t)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$E(t)$		↗		↘	‖	↘	$T.E.$	↗	

Άρα για $t = 1$ έχουμε ελάχιστο εμβαδόν και οι συντεταγμένες του σημείου A είναι

$$A(\alpha, 2\alpha)$$

B4. Το 15% του ανθρώπινου πληθυσμού έχει ψηλό δείκτη νοημοσύνης (I.Q.).

(α) Επιλέγουμε στην τύχη 10 άτομα από αυτόν τον πληθυσμό. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των πιο κάτω ενδεχομένων:

Α: «Ανάμεσα στα 10 άτομα υπάρχουν ακριβώς 4 με ψηλό I.Q.»
Β: «Ανάμεσα στα 10 άτομα υπάρχουν τουλάχιστον 2 με ψηλό I.Q.»
(μονάδες 7)

(β) Να βρείτε το ελάχιστο πλήθος ατόμων που πρέπει να επιλέξουμε τυχαία από τον πληθυσμό αυτό, ώστε η πιθανότητα να υπάρχει τουλάχιστον ένα άτομο με ψηλό I.Q. να είναι μεγαλύτερη του 90%. **(μονάδες 3)**

Λύση:

(α) Για το ενδεχόμενο A:

Επιλέγουμε τα 4 από τα 10 άτομα με $\binom{10}{4}$ τρόπους. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Ψ_i:«να πάρω άτομο με ψηλό I.Q. στην i-επιλογή», $i = 1,2,\cdots,10$

Τα ενδεχόμενα Ψ_i και Ψ_i' είναι ανεξάρτητα με

$$P(\Psi_i) = 0{,}15, \quad P(\Psi_i') = 0{,}85$$

$$P(A) = \binom{10}{4}(0.15)^4(0.85)^6 = 0{,}04$$

Για το ενδεχόμενο B:

$$P(B) = P(\text{τουλάχιστον } 2 \text{ άτομα με ψηλό } I.Q.)$$

$$= 1 - P(\text{ακριβώς } 1 \text{ άτομο με ψηλό } I.Q.) - P(\text{κανένα άτομο με ψηλό } I.Q.)$$

$$= 1 - \binom{10}{1}(0.15)^1(0.85)^9 - (0.85)^{10} = 0{,}456$$

(β) Θέλουμε

$$P(\text{τουλάχιστον } 1 \text{ άτομο με ψηλό } I.Q.) > 90\%$$

$$\Rightarrow 1 - P(\text{κανένα άτομο με ψηλό } I.Q.) > 90\%$$

$$\Leftrightarrow P(\text{κανένα άτομο με ψηλό } I.Q.) < 10\%$$

Έστω $N \epsilon \mathbb{N}$ το πλήθος των ατόμων που επιλέγουμε.

$$\Rightarrow (0{,}85)^N < 0{,}1 \ \Leftrightarrow \ln(0{,}85)^N < \ln(0{,}1) \ (y = lnx \text{ γνησίως αύξουσα})$$

$$\Leftrightarrow N\ln(0{,}85) < \ln(0{,}1) \Leftrightarrow N > \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}85)} = 14{,}2$$

Άρα, το ελάχιστο πλήθος ατόμων που πρέπει να επιλέξουμε είναι:

$$N = 15$$

Β5.	Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f: \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν τα πιο κάτω:

i. Είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{0\}$

ii. $f(-2) = -4\sqrt{e}$, $f\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}}$, $f(1) = -\frac{1}{e}$, $f(2) = 0$

iii. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$

iv. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

v. $\lim_{x\to +\infty} [f(x) - (x-3)] = 0$

vi. $\lim_{x\to -\infty} [f(x) - (x-3)] = 0$

Δίνεται επίσης ο πίνακας προσήμων των συναρτήσεων f, f' και f''

x	$-\infty$		-2		0		$\frac{2}{5}$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$		$-$	‖	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$		$+$		$+$	

Λύση:

(α) Από τα δεδομένα της άσκησης συμπεραίνουμε τα εξής:

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία:

$$\left(-2, -4\sqrt{e}\right), \quad \left(\frac{2}{5}, -\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}}\right), \quad \left(1, -\frac{1}{e}\right), \quad (2,0)$$

- Αφού:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$$

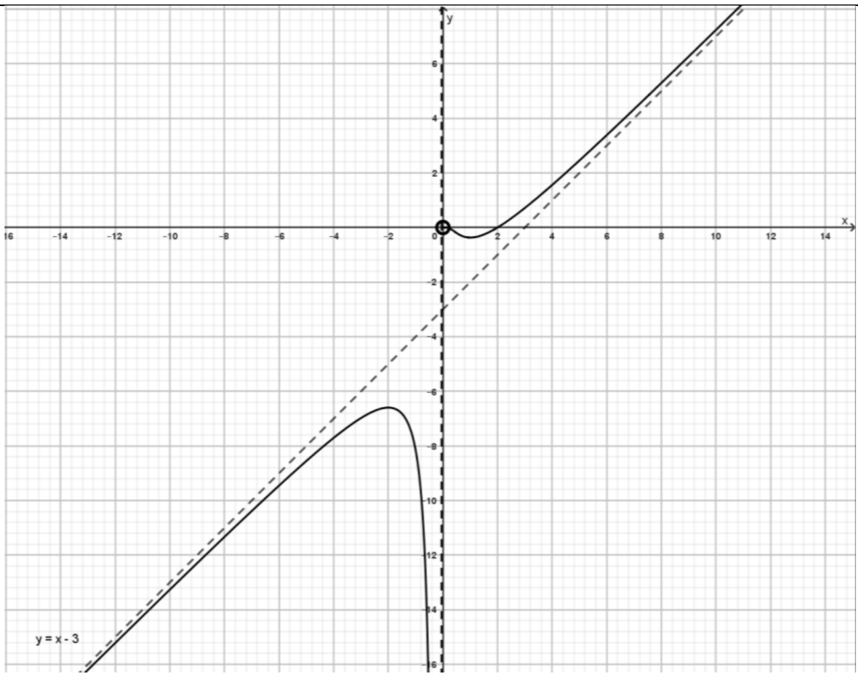
συμπεραίνουμε ότι η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f (μόνο από αριστερά).

- Επίσης:

$$\lim_{x\to +\infty} [f(x) - (x-3)] = 0, \quad \lim_{x\to -\infty} [f(x) - (x-3)] = 0$$

που δείχνει ότι η ευθεία $y = x - 3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

- Από τον πίνακα προσήμου της πρώτης παραγώγου, προκύπτει ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x = -2$, το $f(-2) = -4\sqrt{e}$ και τοπικό ελάχιστο στο $x = 1$, το $f(1) = -\frac{1}{e}$.
- Από τον πίνακα προσήμου της δεύτερης παραγώγου, προκύπτει ότι η συνάρτηση παρουσιάζει σημείο καμπής στο σημείο $\left(\frac{2}{5}, -\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}}\right)$.
- Προκύπτει η πιο κάτω γραφική παράσταση:


y
x
y = x - 3