**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ**

**ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ**

**ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**

**ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2021**

**Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (37)**

**Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: ΠΕΜΠΤΗ, 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021**

**8:00 – 11:00**

**ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΕΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ. Στο τέλος του δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο το οποίο αποτελείται από τρεις (3) σελίδες.**

**ΜΕΡΟΣ Α΄: Αποτελείται από 10 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

**Α1** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int(3x^2 - e^x + συνx - π)dx$

**Α2** Δίνεται η λέξη **ΠΑΝΔΗΜΙΑ**.

(α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της.

(β) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της που αρχίζουν με το γράμμα **Π** και τελειώνουν με το γράμμα **Α**.

**Α3** Να μετατρέψετε την πιο κάτω τριγωνομετρική παράσταση σε αλγεβρική παράσταση του $x$:

$$συν(τοξημ(4x))\ ,\ \ 0 \leq x \leq \frac{1}{4}$$

**Α4** (α) Να διατυπώσετε τον ορισμό της έλλειψης.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης, με εστίες τα σημεία $E(4,0)$ και $E'(-4,0)$, αν το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου της έλλειψης από τις δύο εστίες της είναι ίσο με $10$ μονάδες.

**Α5** Δίνεται το χωρίο το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τύπο $y = lnx, x \in (0, +\infty)$, της γραφικής παράστασης της ευθείας $y = 2$ και των αξόνων των συντεταγμένων. Να βρείτε:

(α) το εμβαδόν του χωρίου

(β) τον όγκο που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του χωρίου γύρω από τον άξονα $y'y$

**Α6** Για να παρακολουθήσουν πέντε φοιτητές ένα σεμινάριο, με φυσική παρουσία, θα πρέπει να υποβληθούν σε έναν από τους παρακάτω τρεις ελέγχους:

i) μοριακό έλεγχο

ii) ρινικό έλεγχο ταχείας ανίχνευσης

iii) έλεγχο ταχείας ανίχνευσης με δείγμα σάλιου

(α) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να πραγματοποιηθούν οι έλεγχοι αυτοί;

(β) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να πραγματοποιηθούν οι έλεγχοι αυτοί, αν δύο συγκεκριμένοι φοιτητές θα υποβληθούν σε μοριακό έλεγχο;

**Α7** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ln(x^2+1) - x^2$ , $x \in R$.

(α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f$ ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

(β) Να αποδείξετε ότι: $ln\,(x^2+1) \leq x^2$, για κάθε $x \in R$.

**Α8** Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\alpha > \beta$ και το τυχαίο σημείο της $P(\alpha\sigma\upsilon\nu\theta, \beta\eta\mu\theta)$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Η κάθετη της έλλειψης στο σημείο $P$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Lambda$.

(α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της κάθετης της έλλειψης στο σημείο $P$ είναι η $(\alpha\eta\mu\theta)x - (\beta\sigma\upsilon\nu\theta)y = (\alpha^2 - \beta^2)\,\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta$.

(β) Να δείξετε ότι η εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου $M$ του ευθύγραμμου τμήματος $P\Lambda$ είναι έλλειψη.

**Α9** Με την υπόθεση ότι $1 - \eta\mu 2x + 2\sigma\upsilon\nu 2x \neq 0$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ και χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση που δίνεται ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{dx}{1 - \eta\mu 2x + 2\sigma\upsilon\nu 2x} \quad , \quad t = \varepsilon\varphi x\,, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$$

**Α10** Να δείξετε ότι η εξίσωση $lnx = \frac{1}{x}$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

**ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄**

**ΑΚΟΥΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄**

**ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από 5 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

**Β1** Δίνεται η συνάρτηση $f$ με τύπο:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 2}$$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής της με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα, τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης και να την παραστήσετε γραφικά.

**Β2** Δίνονται οι συναρτήσεις $h: R \to R$ και $g: R \to R$. Η συνάρτηση $h$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει ότι $h'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in R$ και $g(x) \cdot h'(x) = h(x)$, για κάθε $x \in R$. Αν η συνάρτηση $h$ παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x_0$, να βρείτε την προσανατολισμένη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της συνάρτησης $g$ στο $x_0$ με τον άξονα $x'x$.

**Β3** Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$ και το σημείο της $A(t^2, 2t)$, $t > 0$. Η προβολή του σημείου $A$ πάνω στον άξονα $y'y$ είναι το σημείο $B$ και η προβολή του σημείου $B$ πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $OA$ είναι το σημείο $M$, όπου $O$ η αρχή των αξόνων. Η προέκταση του ευθύγραμμου τμήματος $MB$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\Gamma$ και η προέκταση του ευθύγραμμου τμήματος $A\Gamma$ τέμνει την παραβολή στο σημείο $\Delta$.

(α) Να δείξετε ότι το σημείο $\Gamma$ είναι το $(4,0)$.

(β) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AO\Delta$ δίνεται από τη σχέση:

$$E(t) = \frac{16}{t} + 4t \ , \ \ t > 0$$

(γ) Να βρείτε την τιμή του $t$, για την οποία το εμβαδόν του τριγώνου $AO\Delta$ γίνεται ελάχιστο.

**Β4** Δίνεται η συνάρτηση $g: R \to R$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει ότι:

i) $g''(x)e^{g(x)} + (g'(x))^2 e^{g(x)} = 2$

ii) $g(1) = 0$ και $g'(1) = 1$

(α) Να δείξετε ότι: $g'(x)\, e^{g(x)} = 2x - 1$, για κάθε $x \in R$

(β) Να βρείτε συνάρτηση $g$ που να ικανοποιεί τις συνθήκες i) και ii)

**Β5** Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f(x)$, $x \in [0, \beta]$, $\beta > 0$, για την οποία ισχύουν τα εξής:

i) $f(x) > 0$ , $\forall x \in [0, \beta]$
ii) $f(x) + f(\beta - x) = c$ , $\forall x \in [0, \beta]$, όπου $c$ σταθερά και $c > 0$.

(α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f$ , του άξονα των $x'x$ και των ευθειών $x = 0$ και $x = \beta$ είναι ίσο με $\frac{\beta c}{2}$ τ.μ.

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g$ με τύπο $g(x) = \frac{\eta\mu^2 x\ \sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu^2 x} + 1,\ x \in [0, \pi]$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης αυτής, του άξονα των $x'x$ και των ευθειών $x = 0$ και $x = \pi$.

**ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ**