ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2018

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Παρασκευή, 25/05/2018

8:00 – 11:00

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ
Στο τέλος του εξεταστικού δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο που αποτελείται από τρεις (3) σελίδες.
Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.

<u>ΜΕΡΟΣ Α΄</u> **Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.**

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int \left(8x^3 - \text{ημ}x - \frac{5}{e^x} + 7\right) dx$$

2. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{3x - 4}$$

3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $8x^3 - 27x^2 + 18x - 2 = 0$ έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα (λύση) στο διάστημα $(0,1)$.

4. Δίνονται τα ψηφία $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

(α) Να βρείτε πόσους τριψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με τα πιο πάνω ψηφία, αν δεν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίου.

(2 μονάδες)

(β) Να βρείτε πόσοι από τους τριψήφιους αριθμούς που σχηματίσαμε στο ερώτημα (α) περιέχουν υποχρεωτικά το ψηφίο 5.

(3 μονάδες)

5. Έστω T το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x^2 + 1$ και $y = 3x^2 + 1$ και την ευθεία $x = 1$.

(α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου T.

(2 μονάδες)

(β) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του T γύρω από την ευθεία $y = 1$.

(3 μονάδες)

6. Σε ένα καλάθι έχουμε 6 μήλα, x αχλάδια και y ροδάκινα, όπου $x, y \in \mathbb{N}$. Επιλέγουμε τυχαία ένα φρούτο από το καλάθι. Η πιθανότητα να επιλέξουμε αχλάδι ή ροδάκινο είναι $\frac{3}{4}$, ενώ η πιθανότητα να επιλέξουμε μήλο ή ροδάκινο είναι $\frac{7}{12}$.

(α) Να υπολογίσετε τις τιμές των x και y.

(4 μονάδες)

(β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα να επιλέξουμε μήλο ή αχλάδι.

(1 μονάδα)

7. Δίνεται η εξίσωση:

$$\frac{x^2}{\mu + 2} + \frac{y^2}{3 - \mu} = 1, \quad \mu \in \mathbb{R} - \{-2, 3\}$$

(α) Να βρείτε για ποια τιμή του μ η εξίσωση παριστάνει κύκλο.

(1 μονάδα)

(β) Να βρείτε για ποιες τιμές του μ η εξίσωση παριστάνει έλλειψη.

(2 μονάδες)

(γ) Αν $\mu \in (-2, \frac{1}{2})$, να δείξετε ότι η έλλειψη που προκύπτει έχει τις εστίες της στον άξονα των τεταγμένων.

(2 μονάδες)

8. Αν η συνάρτηση $f\colon (-\infty, 0) \to (1, +\infty)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τη σχέση $f^2(x) - 2f(x) = -e^x$, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία καμπής.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \frac{2}{x} \cdot \ln x$$

(α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

(3 μονάδες)

(β) Να δείξετε ότι:

$$\ln x^e \leq x, \ \forall x > 0$$

(2 μονάδες)

10. Δίνεται το ολοκλήρωμα:

$$I_\nu = \int_0^1 \frac{x^\nu}{x^2+1}dx\,, \qquad \nu \in \{0,1,2,3,\dots\}$$

(α) Να δείξετε ότι $I_{2\nu} = \frac{1}{2\nu-1} - I_{2\nu-2},\ \ \forall \nu \in \mathbb{N}$.

(3 μονάδες)

(β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα I_4.

(2 μονάδες)

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄</u> Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = (1-x)e^{2x}$$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής της με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα και τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασής της, αν υπάρχουν, και να την παραστήσετε γραφικά.

2. Έστω M τυχαίο σημείο της παραβολής $y^2 = 4\alpha x$ με $\alpha > 0$ και O η αρχή των αξόνων. Από το σημείο M φέρουμε ευθεία (ε_1) παράλληλη προς τον άξονα της παραβολής η οποία τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο K. Στη συνέχεια, από το σημείο K φέρουμε ευθεία (ε_2) η οποία τέμνει κάθετα το ευθύγραμμο τμήμα OM στο σημείο T.

(α) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε_2) διέρχεται από σταθερό σημείο του άξονα των τετμημένων.

(4 μονάδες)

(β) Να δείξετε ότι η εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του σημείου T , καθώς το M κινείται στην παραβολή, είναι κύκλος.

(6 μονάδες)

3. Σε ένα διαγωνισμό δεξιοτήτων οι διαγωνιζόμενοι θα περάσουν από 5 διαφορετικά στάδια δοκιμασίας. Η πιθανότητα ένας διαγωνιζόμενος να πετύχει σε ένα οποιοδήποτε στάδιο είναι $\frac{4}{5}$. Να υπολογίσετε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

(α) $A = \{$ο διαγωνιζόμενος να πετύχει σε τρία ακριβώς στάδια$\}$

(4 μονάδες)

(β) $B = \{$ο διαγωνιζόμενος να πετύχει σε τρία ακριβώς συνεχόμενα στάδια$\}$

(3 μονάδες)

(γ) $\Gamma = \{$ο διαγωνιζόμενος να πετύχει σε ένα τουλάχιστον στάδιο$\}$

(3 μονάδες)

4. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{9}=1$ και ένα σημείο της $A(9\sigma\upsilon\nu\theta, 3\eta\mu\theta)$ στο πρώτο τεταρτημόριο. Η εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο A τέμνει τους άξονες των τετμημένων και τεταγμένων στα σημεία K και Λ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε την τιμή του θ για την οποία το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος $K\Lambda$ είναι ελάχιστο.

5. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(α) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = 2\alpha - x$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να δείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{2\alpha} f(2\alpha - x)dx = \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx$$

(4 μονάδες)

(β) Αν $f(x) + f(2\alpha - x) = 2\beta,\ \forall x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι

$$\int_{0}^{2\alpha} f(x)\,dx = 2\alpha\beta$$

(4 μονάδες)

(γ) Χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{0}^{4} [(x-2)^{2018} \cdot \eta\mu^{2019}(x-2) + 3]dx$$

(2 μονάδες)

------ **Τ Ε Λ Ο Σ   Ε Ξ Ε Τ Α Σ Η Σ** ------