ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2017

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Παρασκευή, 19/05/2017
8:00 – 11:00

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

<u>ΜΕΡΟΣ Α΄</u> Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{x^2-1}$$

Λύση

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1}\ln(2-x)=0\\ \lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)=0\end{cases} \Rightarrow \text{Απροσδιόριστη μορφή } \left(\frac{0}{0}\right)$$

De L΄ Hospital: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2-x)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{-1}{2-x}}{2x}=-\dfrac{1}{2}$

2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int\left(e^{3x}+\sqrt[3]{x}-7\right)\mathrm{d}x$$

Λύση

$$\int\left(e^{3x}+\sqrt[3]{x}-7\right)\mathrm{d}x=\int\left(e^{3x}+x^{\frac{1}{3}}-7\right)\mathrm{d}x=\frac{e^{3x}}{3}+\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}-7x+c$$

$$=\frac{e^{3x}}{3}+\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}-7x+c$$

3. Δίνεται ο 2×2 πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(α) Να υπολογίσετε τον αντίστροφο πίνακα του A.

(β) Να δείξετε ότι $A^{-1} - A = 4I$, όπου I ο 2×2 μοναδιαίος πίνακας.

Λύση

(α) $|A| = (-3)(-1) - 4 \cdot 1 = -1$

Αφού $|A| = -1 \neq 0$, ο αντίστροφος του πίνακα A υπάρχει.

Συνεπώς,

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(β) $A^{-1} - A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 4I$

4. Αν A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης με

$$P(A) = \frac{3}{10},\ \ P(A \cap B') = \frac{1}{5} \ \text{ και } \ P(A \cup B) = \frac{4}{5},$$

να υπολογίσετε τις πιθανότητες:

(α) $P(A \cap B)$

(β) $P(A/B)$

Λύση

(α) $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{3}{10} - P(A \cap B)$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{10} - \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$$

(β) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{3}{10} + P(B) - \frac{1}{10}$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{8}{10} - \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{5}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{6}$$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = e^{ax} + (a-2)x, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

όπου a θετικός πραγματικός αριθμός.

(α) Να βρείτε την τιμή του a, για την οποία η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 0$.

(β) Να προσδιορίσετε το είδος του ακρότατου και να το υπολογίσετε.

Λύση

(α) $f'(x) = ae^{ax} + a - 2$

Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 0$. Επομένως, $f'(0) = 0$.

$$f'(0) = 0 \Rightarrow ae^0 + a - 2 = 0 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

(β) $f''(x) = a^2 e^{ax} \Rightarrow f''(0) = a^2 = 1 > 0$

Επομένως, το ακρότατο είναι τοπικό ελάχιστο.

$$f(x) = e^x - x \Rightarrow f(0) = e^0 - 0 = 1$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να κατασκευάσουμε τον πίνακα μονοτονίας για τη συνάρτηση f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	Ο.Ε. $f(0) = 1$	$\nearrow$	

Παρατηρούμε ότι το $f(0) = 1$ είναι τοπικό (ολικό) ελάχιστο της συνάρτησης f.

6. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 6\lambda x - 8\lambda y = 0$, όπου λ μη μηδενικός πραγματικός αριθμός.

(α) Να δείξετε ότι η πιο πάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε τιμή του λ, $\lambda \neq 0$. Ακολούθως, συναρτήσει του λ, να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και να υπολογίσετε το μήκος της ακτίνας του κύκλου.

(β) Να δείξετε ότι οι κύκλοι που ορίζονται από την πιο πάνω εξίσωση εφάπτονται στην ευθεία με εξίσωση $3x + 4y = 0$.

Λύση

(α) $x^2 + y^2 - 6\lambda x - 8\lambda y = 0 \Rightarrow (x - 3\lambda)^2 + (y - 4\lambda)^2 - 16\lambda^2 - 9\lambda^2 = 0$

$$\Rightarrow (x - 3\lambda)^2 + (y - 4\lambda)^2 = 25\lambda^2$$

Συνεπώς, παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(3\lambda, 4\lambda)$ και ακτίνα $R = 5|\lambda|$, αφού $\lambda \neq 0$.

Εναλλακτικά, $g = -3\lambda, f = -4\lambda$ και $c = 0$. Επομένως,

$$g^2 + f^2 - c = (-3\lambda)^2 + (-4\lambda)^2 = 9\lambda^2 + 16\lambda^2 = 25\lambda^2 > 0, \forall \lambda \neq 0$$

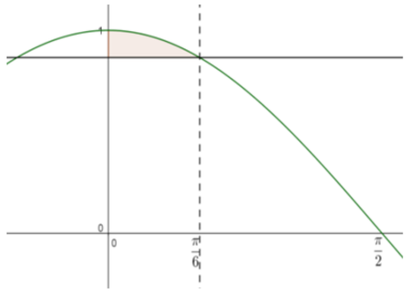
Συνεπώς, παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(3\lambda, 4\lambda)$ και ακτίνα $R = 5|\lambda|$, αφού $\lambda \neq 0$.

(β) Η απόσταση του κέντρου του κύκλου από την ευθεία $3x + 4y = 0$ είναι:

$$d = \frac{|3(3\lambda) + 4(4\lambda)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|25\lambda|}{5} = \frac{25|\lambda|}{5} = 5|\lambda|$$

Αφού $d = 5|\lambda| = R$, οι κύκλοι που ορίζονται από την πιο πάνω εξίσωση εφάπτονται στην ευθεία $3x + 4y = 0$.

7. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των τετμημένων του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = \sigma\upsilon\nu x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, την ευθεία με εξίσωση $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και τον άξονα των τεταγμένων.



Λύση

$\sigma\upsilon\nu\, x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$, αφού $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\sigma\upsilon\nu^2 x - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2} - \frac{3}{4}\right) dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2} - \frac{1}{4}\right) dx = \pi \left(\frac{\eta\mu 2x}{4} - \frac{x}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \pi \left(\frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}\right)}{4} - \frac{\pi}{24}\right) = \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{24}\right) = \frac{\pi}{24}(3\sqrt{3} - \pi) \text{ κ.μ.}$$

8. Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή $xy = 4$. Η εφαπτομένη της υπερβολής στο σημείο της $A\left(2\rho, \frac{2}{\rho}\right), \rho < 0$, τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο B. Στο B φέρουμε κάθετη στον άξονα των τεταγμένων, η οποία τέμνει την υπερβολή στο σημείο $\Gamma\left(2t, \frac{2}{t}\right)$. Να δείξετε ότι:

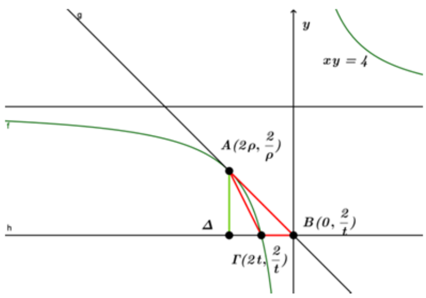
(α) $\rho = 2t$

(β) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι σταθερό

Λύση

(α) $y' = -\frac{y}{x},\ \lambda = -\frac{1}{\rho^2}$, Εξίσωση εφαπτομένης: $y - \frac{2}{\rho} = -\frac{1}{\rho^2}(x - 2\rho)$

Τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο $B\left(0, \frac{4}{\rho}\right)$ και $y_B = y_\Gamma$. Επομένως: $\frac{2}{t} = \frac{4}{\rho} \Longrightarrow \rho = 2t$



(β) $\Gamma\left(\rho, \frac{4}{\rho}\right)$, $E_{AB\Gamma} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 0 & \frac{4}{\rho} & 1 \\ 2\rho & \frac{2}{\rho} & 1 \\ \rho & \frac{4}{\rho} & 1 \end{vmatrix}\right| = 1\ \tau.\mu.$

ή $E_{AB\Gamma} = \frac{1}{2}|A\Delta||B\Gamma| = \frac{1}{2}\left|\frac{2}{\rho} - \frac{4}{\rho}\right||\rho| = 1\ \tau.\mu.$

9. Το Κέντρο Εξυπηρέτησης του Πολίτη θέλει να αλλάξει τον τηλεφωνικό αριθμό επικοινωνίας του με το κοινό. Χρειάζεται έναν οκταψήφιο αριθμό, ο οποίος να σχηματίζεται το πολύ από δύο διαφορετικά ψηφία. Αν ο αριθμός αρχίζει με 77, πόσοι τέτοιοι διαφορετικοί αριθμοί υπάρχουν;

Λύση

1η περίπτωση

Όλα είναι τα ίδια: 77777777 1 αριθμός

2η περίπτωση

Σχηματίζεται από δύο διαφορετικά ψηφία το 7 και ένα άλλο.

7	7	2	2	2	2	2	2

Για κάθε θέση έχουμε 2 επιλογές αριθμών είτε το ψηφίο 7 είτε ένα άλλο ψηφίο από τα υπόλοιπα 9.

Αφαιρούμε την περίπτωση 77777777 και επειδή έχουμε 9 ψηφία, έχουμε:

$$9(2^6 - 1) + 1 = \mathbf{568} \text{ διαφορετικούς αριθμούς}$$

Εναλλακτικά για το $2^6 - 1$*:*

i. Θέλουμε να συμπληρώσουμε 6 θέσεις με τα ψηφία 7 και $x, x \neq 7$. Σε αυτές τις θέσεις θα υπάρχει τουλάχιστον ένα x. Επιλέγουμε τις θέσεις στις οποίες θα τοποθετηθούν τα x και οι υπόλοιπες θέσεις συμπληρώνονται με 7αρια (αν υπάρχουν) ως εξής:
$$\binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = \mathbf{63} \textbf{ τρόποι}$$

ii. Έχουμε μεταθέσεις 6 αντικειμένων (ψηφία 7 και $x, x \neq 7$), στα οποία υπάρχει τουλάχιστον ένα x.
Ένα x, πέντε 7αρια: $\frac{6!}{5!} = 6$
Δύο x, τέσσερα 7αρια: $\frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$
Τρία x, τρία 7αρια: $\frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$
Τέσσερα x, δύο 7αρια: $\frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$
Πέντε x, ένα 7αρι: $\frac{6!}{5!} = 6$
Έξι x: 1

Σύνολο: **63 τρόποι**

10. Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, \pi) \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \frac{x^2}{4} + \ln(1 + \text{συν}x) - \ln 2, \quad \forall x \in [0, \pi)$$

(α) Να δείξετε ότι η παράγωγος f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi)$ και να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

(β) Να δείξετε ότι:

$$x^2 + \ln(1 + \text{συν}x)^4 < \ln 16, \quad \forall x \in (0, \pi)$$

Λύση

(α) Για να αποδείξουμε ότι η παράγωγος f' είναι γνησίως φθίνουσα, είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι η f'' είναι αρνητική.

$$f'(x) = \frac{2x}{4} + \frac{-\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = \frac{x}{2} - \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sigma\upsilon\nu x(1 + \sigma\upsilon\nu x) - (-\eta\mu x)(\eta\mu x)}{(1 + \sigma\upsilon\nu x)^2} = \frac{1}{2} - \frac{\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{(1 + \sigma\upsilon\nu x)^2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sigma\upsilon\nu x + 1}{(1 + \sigma\upsilon\nu x)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{2(1 + \sigma\upsilon\nu x)} = -\frac{1}{2}\varepsilon\varphi^2\left(\frac{x}{2}\right) \leq 0$$

Συνεπώς, η παράγωγος f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi)$.

Άρα $\forall x \in (0, \pi) \Rightarrow f'(x) < f'(0) \Rightarrow f'(x) < \frac{0}{2} - \frac{\eta\mu 0}{1 + \sigma\upsilon\nu 0} \Rightarrow f'(x) < 0$

Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, \pi)$.

(β) Από το α) η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, \pi)$ έχουμε ότι

$$\forall x \in (0, \pi) \Rightarrow f(x) < f(0) \Rightarrow f(x) < \frac{0^2}{4} + \ln(1 + \sigma\upsilon\nu 0) - \ln 2 \Rightarrow f(x) < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{4} + \ln(1 + \sigma\upsilon\nu x) - \ln 2 < 0 \Rightarrow x^2 + 4\ln(1 + \sigma\upsilon\nu x) - 4\ln 2 < 0$$

$$\Rightarrow x^2 + \ln(1 + \sigma\upsilon\nu x)^4 < \ln 16$$

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄</u> **Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.**

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{4x}{(x+1)^2}$$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής της με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα και τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασής της, αν υπάρχουν, και να την παραστήσετε γραφικά.

Λύση

Πεδίο Ορισμού: $\mathbb{R} - \{-1\}$

Σημείο τομής με άξονες: $(0,0)$

$$f'(x) = \frac{4(x+1)^2 - 8x(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{4(1-x)}{(x+1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\searrow$	‖	$\nearrow$	Τ.Μ. $f(1) = 1$	$\searrow$	

Για $x = 1$ έχουμε τοπικό μέγιστο το $f(1) = 1$.

Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -1)$ και στο $[1, +\infty)$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1,1]$.

Οριζόντια ασύμπτωτη:

$$\lim_{x\to+\infty} 4x = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} (x+1)^2 = +\infty$$

$$A = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{(x+1)^2} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{}{\overset{DLH}{=}}} \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{2(x+1)} = 0$$

Ομοίως:

$$\lim_{x\to-\infty} 4x = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} (x+1)^2 = +\infty$$

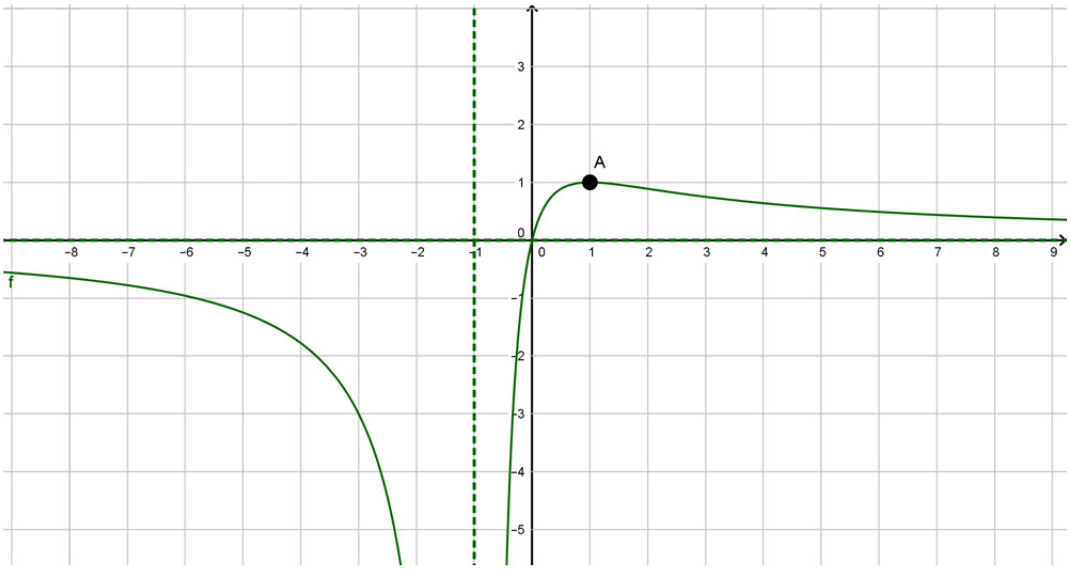
$$B = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x}{(x+1)^2} \overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{\overset{DLH}{=}} 0$$

Επομένως, η γραφική παράσταση έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 0$.

Κατακόρυφη ασύμπτωτη:

$$\lim_{x \to -1} \frac{4x}{(x+1)^2} = -\infty$$

Επομένως, η γραφική παράσταση έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = -1$.



2. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $x^2 = 9y$ και το σημείο $A(3,-3)$. Από το A φέρουμε τις εφαπτομένες (ε_1) και (ε_2) προς την παραβολή.

(α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών (ε_1) και (ε_2).

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή και τις ευθείες (ε_1) και (ε_2).

Λύση

(α) Ισχύει ότι $y' = \frac{2x}{9}$. Επομένως, η κλίση της εφαπτομένης στο $\left(x_0, \frac{x_0^2}{9}\right)$ είναι ίση με $\frac{2x_0}{9}$ και η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η $y - \frac{x_0^2}{9} = \frac{2x_0}{9}(x - x_0)$. Αφού διέρχεται από το $(3,-3)$, ισχύει:

$$-3 - \frac{x_0^2}{9} = \frac{2x_0}{9}(3 - x_0) \Rightarrow x_0^2 - 6x_0 - 27 = 0 \Rightarrow (x_0 - 9)(x_0 + 3) = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = 9 \text{ ή } x_0 = -3$$

Τα σημεία που τέμνουν οι εφαπτόμενες την παραβολή είναι τα $(9,9)$ και $(-3,1)$.

$$\lambda_1 = -\frac{2}{3}, \qquad \lambda_2 = 2$$

Οι εξισώσεις των εφαπτομένων είναι αντίστοιχα:

$$(\varepsilon_1): y - 1 = -\frac{2}{3}(x + 3) \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x - 1$$

$$(\varepsilon_2): y + 3 = 2(x - 3) \Rightarrow y = 2x - 9$$

Εναλλακτικά, έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης που διέρχεται από το σημείο $(3,-3)$.

$$y = \lambda x + \beta \Rightarrow -3 = 3\lambda + \beta \Rightarrow \beta = -3\lambda - 3$$

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= 9y \\ y &= \lambda x + \beta \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2 = 9(\lambda x + \beta) \Rightarrow x^2 - 9\lambda x - 9\beta = 0$$

Η εξίσωση $y = \lambda x + \beta$ είναι εφαπτομένη. Άρα:

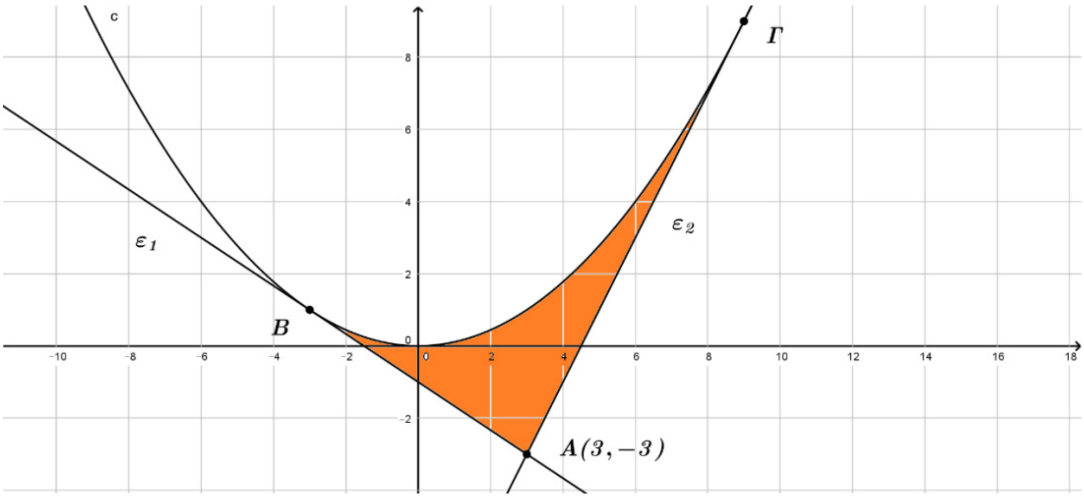
$$\Delta = 0 \Rightarrow 81\lambda^2 - 108\lambda - 108 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda = 2 \Rightarrow \beta = -9 \\ \lambda = -\frac{2}{3} \Rightarrow \beta = -1 \end{matrix}$$

Οι εξισώσεις των εφαπτομένων είναι:

$$y = 2x - 9 \text{ και } y = -\frac{2}{3}x - 1$$

(β) $E = \int_{-3}^{3}\left(\frac{x^2}{9}+\frac{2}{3}x+1\right)dx + \int_{3}^{9}\left(\frac{x^2}{9}-2x+9\right)dx$

$$= \left[\frac{x^3}{27}+\frac{x^2}{3}+x\right]_{-3}^{3} + \left[\frac{x^3}{27}-x^2+9x\right]_{3}^{9} = 8+8 = 16\ \tau.\mu.$$



3. Δύο ομάδες, οι A και B, συμμετέχουν στη σειρά των τελικών του πρωταθλήματος πετοσφαίρισης. Νικήτρια της σειράς των τελικών είναι η ομάδα που θα πετύχει πρώτη 4 νίκες. Η πιθανότητα να κερδίσει η ομάδα A έναν οποιονδήποτε αγώνα της σειράς των τελικών είναι $\frac{2}{3}$.

(α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου στη σειρά των τελικών να διεξαχθούν 6 αγώνες για να στεφθεί πρωταθλήτρια μία ομάδα.

(β) Δεδομένου ότι έχουν διεξαχθεί 6 αγώνες για να στεφθεί πρωταθλήτρια μία ομάδα, να υπολογίσετε την πιθανότητα η ομάδα αυτή να είναι η A.

(*Σημείωση: Σε έναν αγώνα πετοσφαίρισης δεν υπάρχει το αποτέλεσμα της ισοπαλίας, δηλαδή υπάρχει πάντα νικητής.*)

Λύση

(α) Αφού θα γίνουν 6 αγώνες για να στεφθεί μια ομάδα πρωταθλήτρια, θα έχουμε τις πιο κάτω περιπτώσεις:

1η περίπτωση (Κερδίζει ο A: $4-2$)
Συμβολίζουμε με A_i, B_i τη νίκη στο i –παιχνίδι της ομάδας A, B, αντίστοιχα, όπου $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$. Τα ενδεχόμενα A_i, B_j είναι ανεξάρτητα ανά δύο για κάθε $i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}$. Έχουμε $P(A_i) = \frac{2}{3}$ και $P(B_i) = \frac{1}{3}$, για κάθε $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$. Για να κερδίσει η ομάδα A $4-2$, πρέπει να πραγματοποιηθεί το A_6. Στα υπόλοιπα 5 παιχνίδια έχουμε την πραγματοποίηση τριών A_i και δύο B_i με $\binom{5}{3} = 10$ τρόπους.
(Επιλέγουμε τις θέσεις των A_i, άρα τα B_i επιλέγονται αυτόματα, πχ ο $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap B_4 \cap B_5 \cap A_6$ είναι ένας από αυτούς τους δέκα τρόπους.)
Άρα:

$$P(A: 4-2) = 10 \cdot P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap B_4 \cap B_5 \cap \boldsymbol{A_6}) = 10\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{160}{729}$$

2η περίπτωση (Κερδίζει ο B $4-2$)
Με τον ίδιο τρόπο η πιθανότητα να κερδίσει B $4-2$ είναι:

$$P(B: 4-2) = 10\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{40}{729}$$

Συνεπώς, η πιθανότητα να γίνουν 6 αγώνες για να στεφθεί μια ομάδα πρωταθλήτρια είναι:

$$\frac{160}{729} + \frac{40}{729} = \frac{200}{729}$$

(β) P(πρωταθλήτρια η A / να γίνουν 6 αγώνες για να στεφθεί μια ομάδα πρωταθλήτρια)=

$$\frac{\frac{160}{729}}{\frac{200}{729}} = \frac{4}{5}$$

4. Δίνεται το σημείο $E(4,0)$ και η ευθεία με εξίσωση $(\varepsilon)\colon x=\frac{25}{4}$.

(α) Να δείξετε ότι το σύνολο των σημείων $T(x,y)$ του επιπέδου με την ιδιότητα

$$\frac{(TE)}{(TN)}=\frac{4}{5},$$

όπου TN είναι η απόσταση του σημείου T από την ευθεία (ε), ανήκει στην έλλειψη με εξίσωση:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

(β) Έστω $T(5\sigma\upsilon\nu\theta, 3\eta\mu\theta)$ ένα τυχαίο σημείο της έλλειψης και $\Lambda\left(\frac{8}{5},0\right)$ ένα σταθερό σημείο. Να υπολογίσετε τις τιμές του θ, $\theta\in[0,2\pi)$, για τις οποίες η απόσταση $T\Lambda$ γίνεται ελάχιστη.

Λύση

(α) $\frac{TE}{TN}=\frac{4}{5}\Rightarrow\frac{\sqrt{(x-4)^2+y^2}}{\left|x-\frac{25}{4}\right|}=\frac{4}{5}\Rightarrow 25[(x-4)^2+y^2]=16\left(x-\frac{25}{4}\right)^2$

$$\Rightarrow 9x^2+25y^2=225\Rightarrow\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

(β) $\Lambda T=D(\theta)=\sqrt{\left(5\sigma\upsilon\nu\theta-\frac{8}{5}\right)^2+9\eta\mu^2\theta}=\sqrt{16\sigma\upsilon\nu^2\theta-16\sigma\upsilon\nu\theta+\frac{289}{25}}$

$$D'(\theta)=\frac{-32\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta+16\eta\mu\theta}{2\sqrt{16\sigma\upsilon\nu^2\theta-16\sigma\upsilon\nu\theta+\frac{289}{25}}}$$

$$D'(\theta)=0\Rightarrow\eta\mu\theta(1-2\sigma\upsilon\nu\theta)=0\Rightarrow\eta\mu\theta=0\text{ ή }\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{1}{2}$$

θ	0		$\pi/3$		π		$5\pi/3$		2π
$D'(\theta)$	0	−	0	+	0	−	0	+	
$D(\theta)$	T.M.	↘	O.E.	↗	O.M.	↘	O.E.	↗	

Η απόσταση γίνεται ελάχιστη όταν $\theta=\frac{\pi}{3}$ ή $\theta=\frac{5\pi}{3}$.

Εναλλακτικά, $(\Lambda T)=\sqrt{16\sigma\upsilon\nu^2\theta-16\sigma\upsilon\nu\theta+\frac{289}{25}}=\sqrt{(4\sigma\upsilon\nu\theta-2)^2+\frac{189}{25}}$.

Το (ΛT) παίρνει ελάχιστη τιμή όταν το υπόριζο γίνεται ελάχιστο, αφού η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\sqrt{x}, x\geq 0$ είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Άρα, πρέπει $4\sigma\upsilon\nu\theta-2=0\Rightarrow\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$ ή $\theta=\frac{5\pi}{3}$.

5. **(α)** Δίνεται συνεχής συνάρτηση f, ορισμένη στο διάστημα $[0,\pi]$. Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $x=\pi-u$, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι:

$$\int_0^\pi x f(\text{ημ}x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\text{ημ}x)\mathrm{d}x$$

(β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I=\int_0^\pi \frac{x\text{ημ}x}{8+\text{ημ}^2x}\mathrm{d}x$$

Λύση

(α) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u=\pi-x$, έχουμε ότι $dx=-du$. Τα άκρα του ολοκληρώματος αλλάζουν ως εξής:

Αν $x=0, u=\pi$ και αν $x=\pi, u=0$.

$$\int_0^\pi xf(\eta\mu x)dx = \int_\pi^0 (\pi-u)f(\eta\mu(\pi-u)(-du)$$

$$=\int_0^\pi (\pi-u)f(\eta\mu(\pi-u))du=\int_0^\pi(\pi-u)f(\eta\mu u)du$$

$$=\int_0^\pi \pi f(\eta\mu x)dx-\int_0^\pi xf(\eta\mu x)dx$$

$$\Rightarrow 2\int_0^\pi xf(\eta\mu x)dx=\pi\int_0^\pi f(\eta\mu x)dx\Rightarrow\int_0^\pi xf(\eta\mu x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi xf(\eta\mu x)dx$$

(β) $f(\eta\mu x)=\frac{\eta\mu x}{8+\eta\mu^2 x}$, f συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Επομένως, σύμφωνα με την παραπάνω ταυτότητα:

$$I=\int_0^\pi\frac{x\eta\mu x}{8+\eta\mu^2x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\frac{\eta\mu x}{8+\eta\mu^2x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\frac{\eta\mu x}{9-\sigma\upsilon\nu^2x}dx$$

Θέτουμε $\sigma\upsilon\nu x=t\Rightarrow-\eta\mu x dx=dt$.

Για $x=0\Rightarrow t=1$ και για $x=\pi\Rightarrow t=-1$

Επομένως:

$$I=-\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{dt}{9-t^2}$$

Θα αναλύσουμε το κλάσμα $\frac{1}{(3-y)(3+y)}$ σε απλά κλάσματα.

$$\frac{1}{(3-y)(3+y)}=\frac{A}{3-y}+\frac{B}{3+y}=\frac{A(3+y)+B(3-y)}{(3-y)(3+y)}$$

Αν $y=3$, τότε $6A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{6}$

Αν $y=-3$, τότε $6B=1 \Rightarrow B=\frac{1}{6}$

Επομένως:

$$I=-\frac{\pi}{2}\int_{1}^{-1}\left(\frac{1}{6(3-t)}+\frac{1}{6(3+t)}\right)dt=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{6(3-t)}+\frac{1}{6(3+t)}\right)dt$$

$$=\frac{\pi}{12}[\ln(3+t)-\ln(3-t)]_{-1}^{1}$$

$$=\frac{\pi}{12}\left[\ln\left|\frac{3+t}{3-t}\right|\right]_{-1}^{1}=\frac{\pi}{12}\left(\ln 2-\ln\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}\ln 2$$