

**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ**  
**ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ**  
**ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**

**ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2016**

**Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

**Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Δευτέρα, 06/06/2016**

**8:00 – 11:00**

**ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ**

**Στο τέλος του εξεταστικού δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο  
που αποτελείται από δύο (2) σελίδες.**

**ΜΕΡΟΣ Α΄** Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.

**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

1. Δίνεται έλλειψη με εξίσωση  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ . Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών, την εκκεντρότητα και τις εξισώσεις των διευθετουσών της έλλειψης.
2. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = (x - 1)^4$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο πεδίο ορισμού της.
3. Δίνεται ο πίνακας  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ .
  - (α) Να αποδείξετε ότι  $A^2 = I$  (όπου  $I$  είναι ο  $2 \times 2$  μοναδιαίος πίνακας).
  - (β) Να βρείτε τον πίνακα  $B = A^{2017} + 2A^{-1} - 3A$ .
4. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = -x^2 + 2x + 5$ ,  $x \in [-1, 2]$ .  
Να βρείτε και να χαρακτηρίσετε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης  $f$ .

5. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ .
- (α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της  $(4,8)$  είναι  $(\epsilon): y = 4x - 8$ .
- (β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ , την εφαπτομένη  $(\epsilon)$  και τον ημιάξονα  $Ox$ .
6. (α) Να δώσετε τον ορισμό της παραβολής.
- (β) Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 4ax$ ,  $a > 0$  με εστία  $E$  και διευθετούσα  $(\delta)$ . Από σημείο  $T$  της παραβολής φέρουμε ευθεία παράλληλη με τον άξονα  $x'x$  που τέμνει την διευθετούσα  $(\delta)$  στο σημείο  $A$  έτσι ώστε  $AE = 6\sqrt{2}$  μονάδες. Αν η περίμετρος του τριγώνου  $TAE$  είναι ίση με  $(12 + 6\sqrt{2})$  μονάδες, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $TAE$ .
7. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 8}}$ , για  $x > 4$  χρησιμοποιώντας είτε την αντικατάσταση  $x = 3 + \tau \epsilon \mu \theta$ ,  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  είτε οποιονδήποτε άλλο τρόπο.
8. Να βρείτε πόσοι από τους ενιαψήφιους αριθμούς που σχηματίζονται χρησιμοποιώντας τους φυσικούς αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 χωρίς επανάληψη, έχουν το 2 πριν από το 3 και το 8 πριν από το 9 ( π.χ. ο 145862973 είναι ένας τέτοιος αριθμός).
9. Δίνεται κύκλος με κέντρο το σημείο  $K(1,3)$  και με ακτίνα τέτοια ώστε η αρχή των αξόνων  $O$  να βρίσκεται εκτός του κύκλου. Από το  $O$  φέρουμε τις εφαπτόμενες  $\epsilon_1, \epsilon_2$  προς τον κύκλο. Αν η μια από τις εφαπτόμενες έχει εξίσωση  $x - 2y = 0$ , να βρείτε την εξίσωση της άλλης εφαπτομένης.
10. Σε ένα παιχνίδι με ζάρια οι παίκτες  $A$  και  $B$  ρίχνουν δύο αμερόληπτα ζάρια ο κάθε ένας και υπολογίζουν κάθε φορά το άθροισμα των αριθμών που εμφανίζονται στις πάνω έδρες τους. Ο  $A$  κερδίζει το παιχνίδι εάν κατά την ρίψη των δύο ζαριών του φέρει άθροισμα ενδείξεων 7 και ο  $B$  κερδίζει το παιχνίδι εάν κατά την ρίψη των δύο ζαριών του φέρει άθροισμα ενδείξεων 10. Οι  $A$  και  $B$  παίζουν το παιχνίδι, ο ένας μετά τον άλλο, μέχρι να κερδίσει ο ένας από τους δύο. Αν ο  $A$  ξεκίνησε να παίζει πρώτος,
- (α) να βρείτε την πιθανότητα να κερδίσει ο  $B$  στην πρώτη του προσπάθεια.
- (β) να βρείτε την πιθανότητα να κερδίσει το παιχνίδι ο  $B$ .

**ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄**  
**ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄**

**ΜΕΡΟΣ Β΄** Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \frac{2x^2}{x+1}$

Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα και τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, να την παραστήσετε γραφικά.

2. Σε ένα κουτί  $K_1$  υπάρχουν 2 πράσινες και 5 μαύρες φανέλες και σε ένα άλλο κουτί  $K_2$  υπάρχουν 3 γαλάζιες και 4 μαύρες φανέλες. Από μία ομάδα 12 κοριτσιών και 8 αγοριών, επιλέγεται τυχαία ένα παιδί. Αν είναι κορίτσι θα πάρει 2 φανέλες από το κουτί  $K_1$  ενώ αν είναι αγόρι θα πάρει 2 φανέλες από το κουτί  $K_2$ . Η επιλογή των δύο φανελών θα γίνει τυχαία χωρίς επανατοποθέτηση. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

(α)  $E_1$ : “να επιλεγεί αγόρι και να επιλέξει φανέλες διαφορετικού χρώματος”.

(β)  $E_2$ : “οι δύο φανέλες που θα επιλεγούν να είναι διαφορετικού χρώματος”.

(γ)  $E_3$ : “να έχει επιλεγεί αγόρι δεδομένου ότι οι δύο φανέλες που έχουν επιλεγθεί είναι διαφορετικού χρώματος”.

(δ)  $E_4$ : “να έχει επιλεγεί αγόρι δεδομένου ότι οι φανέλες που έχουν επιλεγθεί είναι και οι δύο γαλάζιες”.

3. Δίνεται ισοσκελής υπερβολή  $xy = c^2$  με εστίες  $E$  και  $E'$ . Τα  $B\left(ct, \frac{c}{t}\right)$  και  $\Gamma\left(c\rho, \frac{c}{\rho}\right)$  με  $t, \rho \neq 0$ , και  $t, \rho \neq \pm 1$ , είναι τυχαία σημεία της υπερβολής.

(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $B\Gamma$  έχει εξίσωση  $t\rho y + x = c(t + \rho)$ .

(β) Φέρουμε τις εφαπτόμενες της υπερβολής στα σημεία  $B$  και  $\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του σημείου τομής  $\Sigma$  των εφαπτομένων είναι  $\left(\frac{2ct\rho}{t+\rho}, \frac{2c}{t+\rho}\right)$ .

(γ) Αν η ευθεία  $B\Gamma$  περνά από την εστία  $E$ , να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του σημείου  $\Sigma$ .

4. Δίνεται κύκλος  $\kappa_1$  με εξίσωση  $\kappa_1: x^2 + y^2 = 1$  ο οποίος τέμνει τον άξονα των τετμημένων  $x'x$  στα σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$ . Ένας άλλος κύκλος  $\kappa_2$  με κέντρο το σημείο  $\Delta$  και ακτίνα  $\rho$  με  $0 < \rho < 2$ , τέμνει τον κύκλο  $\kappa_1$  στα σημεία  $Z$  και  $Z'$ . Έστω  $Z$  το σημείο με θετική τεταγμένη ( $y > 0$ ) και  $\Sigma$  το σημείο τομής του  $\kappa_2$  με το ευθύγραμμο τμήμα  $\Gamma\Delta$ .

(α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου  $\Delta\Sigma Z$  δίνεται από τον τύπο

$$E(\rho) = \frac{\rho^2 \sqrt{4 - \rho^2}}{4}$$

(β) Να βρείτε την ακτίνα  $\rho$  ώστε το εμβαδόν του τριγώνου  $\Delta\Sigma Z$  να είναι μέγιστο.

5. Έστω δύο συνεχείς συναρτήσεις,

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(-x) = f(x) \text{ και } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } g(-x) = -g(x).$$

(α) Να δείξετε ότι:

$$\int_{-a}^a \frac{f(x)}{e^{g(x)} + 1} dx = \int_0^a f(x) dx$$

(β) Να υπολογίσετε το:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + 5}{2e^{\eta\mu x} + 2} dx$$

----- Τ Ε Λ Ο Σ Ε Ξ Ε Τ Α Σ Η Σ -----