ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2016

Μάθημα : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
4-ΩΡΟ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Πέμπτη, 9 Ιουνίου 2016
8:00 – 11:00

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

<u>ΜΕΡΟΣ Α΄</u>

1.	Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ της συνάρτησης $y = x^3 + 2x - 4$ **Λύση:** $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2$	
2.	Κανονικό τετραγωνικό πρίσμα έχει ακμή βάσης 6 cm και ύψος 15 cm. Να υπολογίσετε τον όγκο του. **Λύση:** $E_\beta = \alpha^2 = 6^2 = 36\,cm^2$ $V = E_\beta \cdot \upsilon = 36 \cdot 15 = 540\ cm^3$	
3.	Ένα κατάστημα ηλεκτρικών ειδών προσφέρει έκπτωση 25% σε όλα του τα είδη. Αν η αρχική τιμή μιας τηλεόρασης είναι €480, να υπολογίσετε την τιμή πώλησής της μετά την έκπτωση. **Λύση:** $480 \cdot \frac{25}{100} = 120$ ή $480 \cdot \frac{75}{100} = 360$ $480 - 120 = 360$ Η τιμή πώλησης της τηλεόρασης θα είναι €360.	

4.	Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και το μήκος της ακτίνας του κύκλου που έχει εξίσωση $(x-1)^2+(y-3)^2=25$ **Λύση:** $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$ $K(\alpha,\beta) \Rightarrow K(1,3)$ $R=\sqrt{25}=5$μονάδες	
5.	Να υπολογίσετε με πόσους τρόπους 7 μαθητές μπορούν: (α) Να παραταχθούν σε ευθεία γραμμή. **(2,5 μονάδες)** (β) Να καθίσουν γύρω από ένα κυκλικό τραπέζι. **(2,5 μονάδες)** **Λύση:** (α) $M_7=7!=5040$ (β) $K_7=(7-1)!=6!=720$	
6.	Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int\left(3x^2-\sqrt{x}+5\right)dx$ **Λύση:** $\int(3x^2-\sqrt{x}+5)\,dx=\int(3x^2-x^{\frac{1}{2}}+5)\,dx=\frac{3x^3}{3}-\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+5x+c$ $=x^3-\frac{2\sqrt{x^3}}{3}+5x+c$	
7.	Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης $\eta\mu^2x-3\eta\mu x+2=0$ **Λύση:** Θέτω $\omega=\eta\mu x$ $\omega^2-3\omega+2=0 \Leftrightarrow (\omega-1)(\omega-2)=0 \Leftrightarrow \omega=1,\ \omega=2$ $\omega=1 \Leftrightarrow \eta\mu x=1 \Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu 90^\circ$ $x=360^\circ\kappa+90^\circ$ $x=360^\circ\kappa+180^\circ-90^\circ \Leftrightarrow x=360^\circ\kappa+90^\circ,\ \kappa\in\mathbf{Z}$ $\omega=2 \Leftrightarrow \eta\mu x=2$ Αδύνατη $\left(-1\le\eta\mu x\le 1\right)$	

8.	Οι βαθμοί ενός μαθητή της Γ΄ Λυκείου στα τέσσερα μαθήματα που εξετάστηκε είναι 16, 11, 18, 16. (α) Να υπολογίσετε: (i) Το μέσο όρο των τεσσάρων βαθμών του μαθητή. **(1,5 μονάδες)** (ii) Τη διάμεσο των τεσσάρων βαθμών του μαθητή. **(1,5 μονάδες)** (β) Αν ο μαθητής εξεταστεί και σε πέμπτο μάθημα, να υπολογίσετε το βαθμό που πρέπει να πάρει στο μάθημα αυτό, ώστε ο μέσος όρος των βαθμών του και στα πέντε μαθήματα να γίνει ίσος με 16. **(2 μονάδες)** **Λύση:** (α) (i) $\bar{x}=\frac{16+11+18+16}{4}=\frac{61}{4}=15,25$ (ii) 11, 16, 16, 18 $\Rightarrow$ $x_\delta=\frac{16+16}{2}=\frac{32}{2}=16$ (β) $\frac{16+11+18+16+x_5}{5}=16$ $\Leftrightarrow 61+x_5=80 \Leftrightarrow x_5=19$	
9.	Να λύσετε το σύστημα $\begin{matrix} 2x-y=7 \\ x^2+xy=10 \end{matrix}$ **Λύση:** $2x-y=7 \Rightarrow y=2x-7$ $x^2+x\cdot(2x-7)=10 \Rightarrow 3x^2-7x-10=0$ $x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{169}}{6}=\frac{7\pm13}{6}\Rightarrow x_1=\frac{10}{3},\ x_2=-1$ $x_1=\frac{10}{3}\Rightarrow y_1=2\cdot\frac{10}{3}-7\Rightarrow y_1=-\frac{1}{3}\Rightarrow (x_1,y_1)=\left(\frac{10}{3},-\frac{1}{3}\right)$ $x_2=-1\Rightarrow y_2=2\cdot(-1)-7\Rightarrow y_2=-9\Rightarrow (x_2,y_2)=(-1,-9)$	

10.	Ένα δοχείο περιέχει 45 λαχνούς αριθμημένους από το 1 μέχρι το 45. Επιλέγουμε τυχαία ένα λαχνό. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων: Α: «Η ένδειξη του λαχνού να διαιρείται με το 9» **(2,5 μονάδες)** Β: «Η ένδειξη του λαχνού να διαιρείται με το 2 και το 5» **(2,5 μονάδες)** **Λύση:** N(Ω)=45 Α={ 9, 18, 27, 36, 45 } $\Rightarrow P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{5}{45}=\frac{1}{9}$ Β={ 10, 20, 30, 40 } $\Rightarrow P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{4}{45}$	

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄
ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

ΜΕΡΟΣ Β΄

1. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό των παιδιών που έχουν 25 οικογένειες μιας ορεινής κοινότητας της Κύπρου.

Αριθμός παιδιών (x_i)	0	1	2	3	4	5
Αριθμός οικογενειών (f_i)	1	7	11	4	1	1

Να υπολογίσετε:

(α) Τον αριθμό των οικογενειών που έχουν περισσότερα από 3 παιδιά. **(1 μονάδα)**

(β) Το ποσοστό (%) των οικογενειών που έχουν λιγότερα από 2 παιδιά. **(2 μονάδες)**

(γ) Τη μέση τιμή ($\bar{x}$) των παρατηρήσεων. **(3 μονάδες)**

(δ) Την τυπική απόκλιση (σ) των παρατηρήσεων (με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων). **(4 μονάδες)**

Λύση:

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$(x_i-\bar{x})^2$	$f_i(x_i-\bar{x})^2$
0	1	0	4	4
1	7	7	1	7
2	11	22	0	0
3	4	12	1	4
4	1	4	4	4
5	1	5	9	9
	25	**50**		**28**

(α) $1+1=2$ οικογένειες

(β) $\frac{8}{25}\cdot 100=32\%$

(γ) $\bar{x}=\frac{50}{25}=2$

(δ) $\sigma=\sqrt{\frac{\sum f_i(x_i-\bar{x})^2}{\nu}}=\sqrt{\frac{28}{25}}=\sqrt{1{,}12}\approx 1{,}06$

2. Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με

$P(A') = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{2}{5}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$.

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες:

(α) $P(A)$ **(1 μονάδα)**

(β) $P(A \cup B)$ **(3 μονάδες)**

(γ) $P(B - A)$ **(3 μονάδες)**

(δ) $P(A/B)$ **(3 μονάδες)**

Λύση:

(α) $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

(β) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$

(γ) $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$

(δ) $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}$

3.	Δίνεται η συνάρτηση $y = x - 1 - ημx$ (α) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ της συνάρτησης. **(3 μονάδες)** (β) Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο $\frac{d^2y}{dx^2}$ της συνάρτησης. **(2 μονάδες)** (γ) Να δείξετε ότι $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y + συνx = x$ **(3 μονάδες)** (δ) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int y\,dx$ **(2 μονάδες)** **Λύση:** (α) $\frac{dy}{dx} = 1 - συνx$ (β) $\frac{d^2y}{dx^2} = ημx$ (γ) $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y + συνx = ημx + 1 - συνx + x - 1 - ημx + συνx = x$ (δ) $\int y\,dx = \int (x - 1 - ημx)\,dx = \frac{x^2}{2} - x + συνx + c$	

4. Δίνεται η λέξη **ΨΗΦΟΦΟΡΟΣ.**

(α) Να βρείτε:

(i) Το πλήθος των αναγραμματισμών της.

(2 μονάδες)

(ii) Το πλήθος των αναγραμματισμών της που αρχίζουν από **Φ** και τελειώνουν σε **Φ**.

(2 μονάδες)

(iii) Το πλήθος των αναγραμματισμών της που έχουν τα σύμφωνα σε συνεχόμενες θέσεις.

(3 μονάδες)

(β) Επιλέγεται τυχαία ένας από τους αναγραμματισμούς της πιο πάνω λέξης. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου ο αναγραμματισμός αυτός να **μην** έχει τα σύμφωνα σε συνεχόμενες θέσεις.

(3 μονάδες)

Λύση:

(α) (i) $M_9^{\varepsilon} = \dfrac{9!}{3!2!} = 30240$

(ii) Φ_ _ _ _ _ _ _Φ

$M_7^{\varepsilon} = \dfrac{7!}{3!} = 840$

(iii) ΨΦΦΡΣ ,Ο, Ο, Ο, Η

$M_5^{\varepsilon} \cdot M_5^{\varepsilon} = \dfrac{5!}{2!} \cdot \dfrac{5!}{3!} = 60 \cdot 20 = 1200$

(β) Α : «Ο αριθμός έχει τα σύμφωνα σε συνεχόμενες θέσεις»

$P(A) = \dfrac{1200}{30240} = \dfrac{5}{126}$

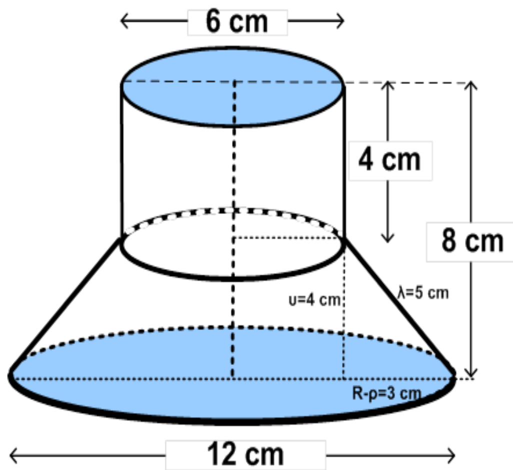
$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{5}{126} = \dfrac{121}{126}$

ή

$30240 - 1200 = 29040$

$P(A') = \dfrac{29040}{30240} = \dfrac{121}{126}$

5. Σε ένα διαγωνισμό δημιουργικότητας και καινοτομίας, μια ομάδα μαθητών κατασκεύασε ένα κλειστό μεταλλικό δοχείο από λαμαρίνα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το δοχείο αποτελείται από ένα κύλινδρο και ένα κόλουρο κώνο. Η μεγάλη βάση του δοχείου έχει διάμετρο 12 cm και η μικρή βάση του έχει διάμετρο 6 cm. Το ύψος του δοχείου είναι 8 cm και το ύψος του κυλίνδρου είναι 4 cm.



Να υπολογίσετε:

(α) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του δοχείου. **(4 μονάδες)**

(β) Τον όγκο του δοχείου. **(4 μονάδες)**

(γ) Το ποσοστό (%) της χωρητικότητας του κυλίνδρου ως προς τη συνολική χωρητικότητα του δοχείου. **(2 μονάδες)**

(Για την επίλυση της άσκησης, το πάχος της λαμαρίνας να θεωρηθεί αμελητέο)

Λύση:

<u>Στοιχεία κυλίνδρου:</u>

$\rho = 6:2 \Rightarrow \rho = 3$ cm

$\upsilon = 4$ cm

<u>Στοιχεία κόλουρου κώνου:</u>

$\rho = 6:2 \Rightarrow \rho = 3$ cm

$R = 12:2 \Rightarrow R = 6$ cm

$\upsilon = 8-4 \Rightarrow \upsilon = 4$ cm

<u>Πυθαγόρειο Θεώρημα</u>

$\lambda^2 = \upsilon^2 + (R-\rho)^2$

$\lambda^2 = 4^2 + (6-3)^2$

$\lambda^2 = 4^2 + 3^2$

$\lambda^2 = 25$

$\lambda = 5$ cm

(α)

$$E_{\text{κυρτής κυλίνδρου}} = 2\pi\rho\upsilon = 2\cdot\pi\cdot 3\cdot 4 = 24\pi\, cm^2$$

$$E_{\text{βάσης}} = \pi\cdot\rho^2 = \pi\cdot 3^2 = 9\pi\ cm^2$$

$$E_{\text{κυρτής κόλουρου κώνου}} = \pi(R+\rho)\lambda = \pi\cdot(6+3)\cdot 5 = 45\pi\, cm^2$$

$$E_{\text{Βάσης}} = \pi\cdot R^2 = \pi\cdot 6^2 = 36\pi\ cm^2$$

$$E_{\text{ολ}} = E_{\text{κυρτής κυλίνδρου}} + E_{\text{κυρτής κόλουρου κώνου}} + E_{\text{Βάσης}} + E_{\text{βάσης}} =$$
$$= 24\pi + 45\pi + 36\pi + 9\pi = 114\pi\, cm^2$$

(β)

$$V_{\text{κυλίνδρου}} = \pi\cdot 3^2\cdot 4 = 36\pi\ cm^3$$

$$V_{\text{κόλουρου κώνου}} = \frac{\pi\upsilon}{3}\left(R^2 + R\cdot\rho + \rho^2\right) = \frac{\pi\cdot 4}{3}\left(6^2 + 6\cdot 3 + 3^2\right) = \frac{\pi\cdot 4\cdot 63}{3} = 84\pi\ cm^3$$

$$V_{\text{δοχείου}} = 84\pi + 36\pi = 120\,\pi\ cm^3$$

(γ)

$$\frac{V_{\text{κυλίνδρου}}}{V_{\text{δοχείου}}}\cdot 100 = \frac{36\pi}{120\pi}\cdot 100 = 30\%$$