**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ**
**ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ**
**ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**

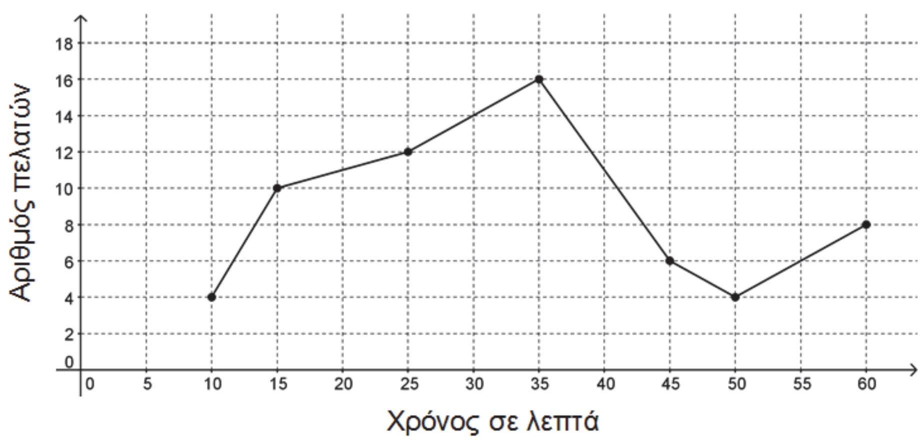
**ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2015**

**Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ (43)**
**Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Δευτέρα, 25/5/2015 ΩΡΑ: 08:00 – 11:00**

## Προτεινόμενες Λύσεις

**ΜΕΡΟΣ Α΄**

**1.** Την περασμένη Παρασκευή παρατηρήσαμε τους πελάτες μιας καφετέριας και καταγράψαμε το χρόνο παραμονής τους (σε λεπτά) σε αυτή. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο πιο κάτω πολύγωνο συχνοτήτων.




Να βρείτε:

(α) Το συνολικό αριθμό των πελατών που επισκέφθηκαν την καφετέρια την περασμένη Παρασκευή.

(β) Τον αριθμό των πελατών που παρέμειναν στην καφετέρια λιγότερο από 30 λεπτά.

**<u>Λύση:</u>**

α) Συνολικός αριθμός πελατών: 4+10+12+16+6+4+8= 60

β) Αριθμός πελατών που παρέμειναν λιγότερο από 30 λεπτά: 12+10+4= 26

| | | |
|---|---|---|
| **2.** | Σε ένα χρυσοχοείο πωλείται ένα κόσμημα αξίας €600. Να βρείτε πόσο θα κοστίσει τελικά στον πελάτη που το αγοράζει, αν πρέπει να πληρώσει επιπλέον 19% Φόρο Προστιθέμενης Αξίας (Φ.Π.Α.).<br><br>**<u>Λύση:</u>**<br>Τιμή με Φ.Π.Α.:<br>$$x = \frac{600 \cdot 119}{100} = €714$$ | |
| **3.** | Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει βάση τετράγωνο πλευράς $5\ cm$ και ύψος $8\ cm$. Να υπολογίσετε:<br>(α) Τον όγκο του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.<br>(β) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.<br><br>**<u>Λύση:</u>**<br>$\alpha)\ V = E_\beta \cdot \upsilon$<br>$V = a^2 \cdot \upsilon$<br>$V = 5^2 \cdot 8 = 200\ cm^3$<br>$\beta)\ E_{o\lambda} = \Pi_\beta \cdot \upsilon + 2E_\beta = 4 \cdot 5 \cdot 8 + 2 \cdot 25 = 160 + 50 = 210\ cm^2$ | |
| **4.** | (α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης **Α Ι Ν Ι Γ Μ Α Τ Α** .<br>(β) Να βρείτε πόσοι από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς αρχίζουν από **Μ Α Ν Α** .<br><br>**<u>Λύση:</u>**<br>α) Α Α Α Ι Ι Ν Μ Τ Γ<br>$$M_9{}^{\varepsilon} = \frac{9!}{3!\,2!} = 30240$$<br>β) **ΜΑΝΑ** \| Α Ι Ι Γ Τ<br>$$M_5{}^{\varepsilon} = \frac{5!}{2!} = 60$$ | |

| | | |
|---|---|---|
| **5.** | Η βάση ορθού πρίσματος είναι ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές $6\ cm$ και $8\ cm$. Αν το ύψος του πρίσματος είναι διπλάσιο από την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου της βάσης του, να υπολογίσετε:<br>(α) Το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας.<br>(β) Τον όγκο του.<br>**<u>Λύση:</u>**<br>$\alpha)\ \Pi.\Theta.\ \ 6^2 +\ 8^2 = x^2 \Rightarrow x = 10\ cm \Rightarrow \upsilon_{\pi\rho} = 20\ cm$<br>$E_\beta = \frac{6\cdot 8}{2} = 24\ cm^2$<br>$\Pi_\beta = 6 + 8 + 10 = 24\ cm \Rightarrow E_\pi = \Pi_\beta \cdot \upsilon = 24 \cdot 20 = 480\ cm^2$<br>$E_{o\lambda} = E_\pi\ + 2E_\beta\ = 480 + 2\cdot 24 = 528\ cm^2$<br>β) $V = E_\beta\ \ \cdot \upsilon \Rightarrow\ V = 24 \cdot 20 \Rightarrow V = 480\ cm^3$ | |
| **6.** | Οι αριθμοί $\boldsymbol{5, 2, 5, 3, 8, 2, 8, 3, 11, \alpha, \beta}$ έχουν μέση τιμή $\bar{x} = 5$ και ο $\boldsymbol{\beta}$ είναι τριπλάσιος του $\boldsymbol{\alpha}$. Να βρείτε:<br>(α) Την επικρατούσα τιμή $(x_\varepsilon)$ των πιο πάνω αριθμών.<br>(β) Τη διάμεσο $(x_\delta)$ των πιο πάνω αριθμών.<br>**<u>Λύση:</u>**<br>$\bar{x} = \frac{5 + 2 + 5 + 3 + 8 + 2 + 8 + 3 + 11 + \alpha + 3\alpha}{11} = 5$<br>$47 + 4\alpha = 55$<br>$4\alpha = 8$<br>Άρα $\alpha = 2\ \kappa\alpha\iota\ \beta = 6$<br>2, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 6, 8, 8, 11 άρα<br>α) $x_\varepsilon = 2$<br>β) $x_\delta = 5$ | |

**7.**

Δίνεται κανονική τετραγωνική πυραμίδα με εμβαδόν βάσης $256\ cm^2$ και εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας $544\ cm^2$. Να υπολογίσετε:

(α) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.

(β) Τον όγκο της πυραμίδας.

**<u>Λύση:</u>**

α) $E_{ολ} = E_β + E_π \Rightarrow E_{ολ} = 256 + 544 = 800cm^2$

β) $E_β = 256\ cm^2 \ \Rightarrow \quad α^2 = 256 \ \ \Rightarrow α = 16\ cm$

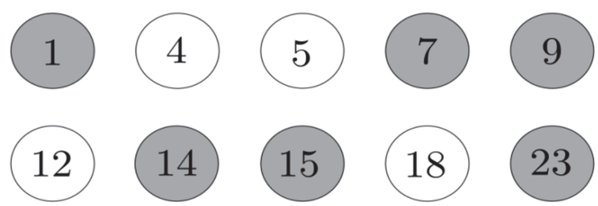
$$E_π = \frac{Π_{β}\ .\ h}{2} \Rightarrow 544 = \frac{4 \cdot 16 \cdot h}{2} \Rightarrow h = 17cm$$

Π.Θ. $\quad υ^2 + \ 8^2 = 17^2 \Rightarrow υ = 15\ cm$

$$V = \frac{E_β . υ}{3} \Longrightarrow \ V = \frac{256 \cdot 15}{3} \ \Longrightarrow V = 1280\ \ cm^3$$

**8.**

Σε ένα δοχείο είναι τοποθετημένες οι πιο κάτω κάρτες.




Παίρνουμε τυχαία μια κάρτα από το δοχείο. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Α: « ο αριθμός που αναγράφεται στην κάρτα είναι άρτιος »

Β: « η κάρτα είναι σκιασμένη »

Να υπολογίσετε τις πιο κάτω πιθανότητες:

(α) $\mathrm{P(A)}$

(β) $\mathrm{P(B)}$

(γ) $\mathrm{P(B - A)}$

(δ) $\mathrm{P(A \cup B)}$

**<u>Λύση:</u>**

$α)\ \ P(A) = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$

$β)\ \ P(B) = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$

$γ)\ P(A \cap B) = \dfrac{1}{10}$

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{6}{10} - \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$δ)\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{4}{10} + \dfrac{6}{10} - \dfrac{1}{10} = \dfrac{9}{10}$

| | | |
|---|---|---|
| **9.** | Η περίμετρος της βάσης κώνου είναι $6\pi\ cm$ και η γενέτειρα του κώνου σχηματίζει με τη βάση του γωνία $60°$. Να υπολογίσετε:<br>(α) Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου.<br>(β) Τον όγκο του κώνου.<br>**<u>Λύση:</u>**<br>$\Gamma = 2\pi R \Rightarrow \quad \Gamma = 6\pi\ cm \Longrightarrow \quad 2\pi R = 6\pi \Longrightarrow R = 3\ cm$<br>Από θεώρημα $30° \longrightarrow \lambda = 2R \Longrightarrow \lambda = 6\ cm$<br>Π.Θ. $\upsilon^2 + 3^2 = 6^2 \Rightarrow \upsilon^2 = 27 \Rightarrow \upsilon = 3\sqrt{3}\ cm$<br>α) $E_\kappa = \pi \cdot R \cdot \lambda \Rightarrow E_\kappa = \pi \cdot 3 \cdot 6 \Rightarrow E_\kappa = 18\pi\ cm^2$<br>$\beta)\ V = \frac{\pi R^2.\upsilon}{3} \Longrightarrow V = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 3\sqrt{3}}{3} \Longrightarrow V = 9\sqrt{3}\pi\ \ cm^3$ | |
| **10.** | Στις $8:30$ ο Λεόντιος αναχωρεί με τη βάρκα του από το λιμάνι της Λεμεσού με ταχύτητα $50\ km/h$ και κατευθύνεται προς το λιμάνι της Πάφου, το οποίο απέχει $70\ km$ από το λιμάνι της Λεμεσού. Τριάντα λεπτά αργότερα, ο Αλέξανδρος αναχωρεί με το ταχύπλοο σκάφος του από το λιμάνι της Λεμεσού με ταχύτητα $40\%$ μεγαλύτερη από την ταχύτητα του Λεόντιου και κατευθύνεται κι αυτός προς το λιμάνι της Πάφου, ακολουθώντας ακριβώς την ίδια πορεία. Να εξετάσετε ποιος από τους δύο θα φτάσει πρώτος στο λιμάνι της Πάφου και να δικαιολογήσετε πλήρως με μαθηματικές πράξεις την απάντησή σας.<br>**<u>Λύση:</u>**<br>Λεόντιος $\longrightarrow S_1, u_1, t_1$ Αλέξανδρος $\longrightarrow S_2, u_2, t_2$<br>$S_1 = u_1 \cdot t_1 \Longrightarrow 70 = 50 \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{7}{5}h = 1\ ώρα\ και\ 24\ λεπτά$<br>Ο Λεόντιος θα φθάσει στο λιμάνι της Πάφου στις 9:54<br>$u_2 = \frac{140}{100} \cdot 50 = 70\ km/h$<br>$S_1 = S_2 = 70\ km$<br>$S_2 = u_2 \cdot t_2 \Longrightarrow 70 = \mathbf{70} \cdot t_2 \Rightarrow t_2 = 1h$<br>Ο Αλέξανδρος θα φθάσει στο λιμάνι της Πάφου στις 10:00<br>(Ξεκίνησε στις $9:00\ + 1\ ώρα \longrightarrow 10:00$ )<br>**Ο Λεόντιος θα φθάσει πρώτος στο λιμάνι της Πάφου** | |

**ΜΕΡΟΣ Β΄**

**1.** Στην αρχή της σχολικής χρονιάς, ζητήθηκε από $50$ μαθητές ενός Λυκείου να αναφέρουν τον αριθμό των βιβλίων που διάβασαν κατά την περίοδο των θερινών διακοπών. Οι απαντήσεις που έδωσαν παρουσιάζονται στον πιο κάτω πίνακα.

| Αριθμός Βιβλίων $(x_i)$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Αριθμός Μαθητών $(f_i)$ | $8$ | $17$ | $11$ | $3$ | $7$ | $4$ |

Να υπολογίσετε:

(α) Την επικρατούσα τιμή $(x_\varepsilon)$ των παρατηρήσεων.

(β) Τη διάμεσο $(x_\delta)$ του αριθμού των παρατηρήσεων.

(γ) Τη μέση τιμή $(\bar{x})$ του αριθμού των παρατηρήσεων.

(δ) Την τυπική απόκλιση $(\sigma)$ του αριθμού των παρατηρήσεων.

**Λύση:**

| $x_i$ | $f_i$ | $f_i x_i$ | $(x_i-\bar{x})^2$ | $f_i(x_i-\bar{x})^2$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $8$ | $0$ | $4$ | $32$ |
| $1$ | $17$ | $17$ | $1$ | $17$ |
| $2$ | $11$ | $22$ | $0$ | $0$ |
| $3$ | $3$ | $9$ | $1$ | $3$ |
| $4$ | $7$ | $28$ | $4$ | $28$ |
| $6$ | $4$ | $24$ | $16$ | $64$ |
| | $\sum f_i = 50$ | $\sum f_i x_i = 100$ | | $\sum f_i(x_i-\bar{x})^2 = 144$ |

(α) Επικρατούσα τιμή: $x_\varepsilon = 1$

(β) Διάμεσος βρίσκεται στην $25^\eta$ και $26^\eta$ θέση: $x_\delta = \frac{1+2}{2} = 1{,}5$

(γ) Μέση Τιμή:

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{100}{50} = 2$$

(δ) Τυπική Απόκλιση:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i-\bar{x})^2}{\sum f_i}} = \sqrt{\frac{144}{50}} \approx 1{,}697$$

**2.**

Από την ομάδα χορού ενός σχολείου, η οποία αποτελείται από 12 κορίτσια και 8 αγόρια, θα επιλεγούν 10 παιδιά για να χορέψουν σε μια εκδήλωση. Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή των παιδιών αυτών:

(α) Αν δεν υπάρχει κανένας περιορισμός.

(β) Αν στην εκδήλωση θα χορέψουν ακριβώς 6 κορίτσια.

(γ) Αν στην εκδήλωση πρέπει οπωσδήποτε να χορέψει ένα συγκεκριμένο αγόρι.

(δ) Αν στην εκδήλωση θα χορέψουν τουλάχιστον 6 αγόρια.

**Λύση:**

(α) $\binom{20}{10} = 184\,756$ τρόποι

(β) $\binom{12}{6} \cdot \binom{8}{4} = 924 \cdot 70 = 64\,680$ τρόποι

(γ) Στην εκδήλωση πρέπει να χορέψει ένα συγκεκριμένο αγόρι, συνεπώς από τα υπόλοιπα 19 άτομα πρέπει να επιλέξουμε άλλους 9.

$$\binom{19}{9} = 92\,378$$

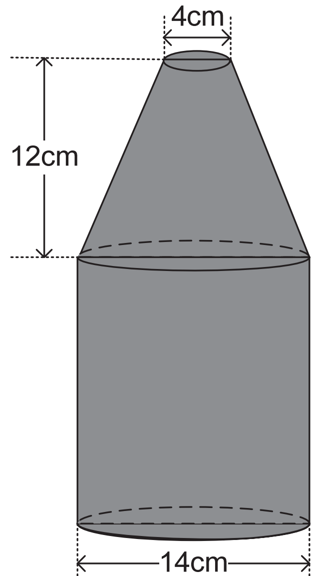
(δ) Στην εκδήλωση θα χορέψουν 6, 7 ή 8 αγόρια.

$$\binom{12}{4} \cdot \binom{8}{6} + \binom{12}{3} \cdot \binom{8}{7} + \binom{12}{2} \cdot \binom{8}{8} = 13\,860 + 1760 + 66 = 15\,686$$

| | | |
|---|---|---|
| **3.** | Η κυρία Μαρίνα κατάθεσε στην τράπεζα $A$ ένα κεφάλαιο με επιτόκιο $3\ \%$ για $1$ χρόνο και $1$ μήνα και στην τράπεζα $B$ ένα άλλο κεφάλαιο με επιτόκιο $4\ \%$ για $2$ χρόνια. Το κεφάλαιο που κατάθεσε στην τράπεζα $A$ ήταν κατά $€6000$ μεγαλύτερο από το κεφάλαιο που κατάθεσε στην τράπεζα $B$. Από την τράπεζα $B$ πήρε διπλάσιο τόκο από τον τόκο που πήρε από την τράπεζα $A$.<br>Να υπολογίσετε:<br>(α) Το συνολικό κεφάλαιο που κατάθεσε στις δύο τράπεζες.<br>(β) Το συνολικό τόκο που πήρε από τις δύο τράπεζες.<br>**<u>Λύση:</u>**<br>$\mathrm{K}_1 = K + €6000$ $\quad$ $\mathrm{K}_2 = K$<br>$\mathrm{E}_1 = \mathbf{3}\%$ $\quad$ $\mathrm{E}_2 = \mathbf{4}\%$<br>$\mathrm{X}_1 = 1$ χρόνος και $1$ μήνας $= 13$ μήνες $\quad$ $\mathrm{X}_2 = \mathbf{2}$ χρόνια<br>$\mathrm{T}_2 = 2\mathrm{T}_1 \Rightarrow \frac{\mathrm{K}_2 \cdot \mathrm{E}_2 \cdot \mathrm{X}_2}{100} = 2 \cdot \frac{\mathrm{K}_1 \cdot \mathrm{E}_1 \cdot \mathrm{X}_1}{1200}$<br>$\Rightarrow \frac{\mathrm{K} \cdot 4 \cdot 2}{100} = 2 \cdot \frac{(K + 6000) \cdot 3 \cdot 13}{1200}$<br>$8K = \frac{(K + 6000) \cdot 13}{2}$<br>$16K = 13K + 78000$<br>$3K = 78000$<br>$K = €26000$<br>$\mathrm{K}_1 = €26000 + €6000 = €32000 \quad \textit{και} \quad \mathrm{K}_2 = €26000$<br>**α) Συνολικό Κεφάλαιο** $\mathbf{K_1 + K_2 = 32000 + 26000 = €58000}$<br>$\mathrm{T}_2 = \frac{\mathrm{K}_2 \cdot \mathrm{E}_2 \cdot \mathrm{X}_2}{100} \Longrightarrow \mathrm{T}_2 = \frac{26000 \cdot 4 \cdot 2}{100} \Longrightarrow \mathrm{T}_2 = €2080$<br>$\Longrightarrow \mathrm{T}_1 = €1040$<br>**β) Συνολικός Τόκος** $\mathbf{T_1 + T_2 = 1040 + 2080 = €3120}$ | |

| | | |
|---|---|---|
| **4.** | Από όλα τα αυτοκίνητα τα οποία περνούν από τακτικό έλεγχο σε ένα συνεργείο, έχει παρατηρηθεί ότι το 10% από αυτά παρουσιάζουν μηχανικό πρόβλημα, το 6% από αυτά παρουσιάζουν ηλεκτρονικό πρόβλημα και το 2% των αυτοκινήτων παρουσιάζουν και ηλεκτρονικό και μηχανικό πρόβλημα. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα αυτοκίνητο που βρίσκεται στο συνεργείο για έλεγχο, να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:<br><br>Α: «το αυτοκίνητο δεν παρουσιάζει μηχανικό πρόβλημα»<br><br>Β: «το αυτοκίνητο παρουσιάζει ηλεκτρονικό αλλά όχι μηχανικό πρόβλημα»<br><br>Γ: «το αυτοκίνητο παρουσιάζει μηχανικό ή ηλεκτρονικό πρόβλημα»<br><br>Δ:«το αυτοκίνητο δεν παρουσιάζει ούτε μηχανικό ούτε ηλεκτρονικό πρόβλημα»<br><br>**<u>Λύση:</u>**<br><br>$P(M)=\frac{10}{100}$, $P(H)=\frac{6}{100}$ , $P(M\cap H)=\frac{2}{100}$<br><br>$P(A)=P(M')=1-P(M)=1-\frac{10}{100}=\frac{90}{100}=\frac{9}{10}$<br><br>$P(B)=P(H\cap M')=P(H)-P(M\cap H)=\frac{6}{100}-\frac{2}{100}=\frac{4}{100}=\frac{1}{25}$<br><br>$P(\Gamma)=P(M\cup H)=P(M)+P(H)-P(M\cap H)=\frac{10}{100}+\frac{6}{100}-\frac{2}{100}=\frac{14}{100}=\frac{7}{50}$<br><br>$P(\Delta)=P[(M\cup H)']=1-P(M\cup H)=1-\frac{14}{100}=\frac{86}{100}=\frac{43}{50}$ | |

| | | |
|---|---|---|
| **5.** | Μια εταιρεία σχεδίασε μια κλειστή μεταλλική κατασκευή, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η κατασκευή αποτελείται από ένα κύλινδρο και ένα κόλουρο κώνο. Η μεγάλη βάση της κατασκευής έχει διάμετρο $14\,cm$, η μικρή βάση της έχει διάμετρο $4\,cm$ και το ύψος του κόλουρου κώνου είναι $12\,cm$. Ο συνολικός όγκος της κατασκευής είναι $1248\pi\ cm^3$. | |




(α) Να δείξετε ότι το ύψος του κυλίνδρου είναι $20\ cm$.

(β) Όλη η επιφάνεια της κατασκευής βάφεται με ειδική αντιοξειδωτική μπογιά, η οποία κοστίζει 1 σεντ ανά τετραγωνικό εκατοστόμετρο. Να υπολογίσετε πόσο θα κοστίσει το βάψιμο της κατασκευής.

**<u>Λύση:</u>**

α) $V_{ο\lambda} = V_{κο\lambda.κων} + V_{κυ\lambda} \Rightarrow$

$$\Rightarrow V_{ο\lambda} = \frac{\pi\upsilon(R^2 + R\rho + \rho^2)}{3} + \pi R^2 \cdot \upsilon_{κυ\lambda}$$

$$\Rightarrow 1248\pi = \frac{\pi 12(7^2 + 7 \cdot 2 + 2^2)}{3} + \pi 7^2 \cdot \upsilon_{κυ\lambda}$$

$$\Rightarrow 1248 = \frac{12 \cdot 67}{3} + 49 \cdot \upsilon_{κυ\lambda}$$

$$\Rightarrow 49 \cdot \upsilon_{κυ\lambda} = 1248 - 268 \ \Rightarrow\ 49 \cdot \upsilon_{κυ\lambda} = 980$$

$$\Rightarrow \upsilon_{κυ\lambda} = \frac{980}{49} \Rightarrow\ \upsilon_{κυ\lambda} = 20\ cm$$

β) Π.Θ. $\lambda^2 = \upsilon^2 +\ (R - \rho)^2 \Longrightarrow \lambda^2 = 12^2 + (7 - 2)^2$

$$\Longrightarrow \lambda^2 = 144 + 25 = 169 \Longrightarrow \lambda = 13\ cm$$

$$E_{ο\lambda} = E_{κΚο\lambda.Κων} \quad +\ E_{κΚυ\lambda} \quad + E_{κυκ\lambda.1}\ + E_{κυκ\lambda.2}$$

$$\Rightarrow E_{ο\lambda} = \pi(R + \rho)\lambda \quad + 2\pi R\upsilon \quad + \pi R^2 \quad + \pi\rho^2$$

$$\Rightarrow E_{ο\lambda} = \pi(7 + 2) \cdot 13 \quad + 2\pi 7 \cdot 20 + \pi 7^2\ + \quad \pi 2^2$$

$$\Rightarrow E_{ο\lambda} = \ 117\pi \qquad + 280\pi \quad +\ 49\pi +\ 4\pi$$

$\Rightarrow E_{ο\lambda} = 450\pi\ cm^2$ ή $\Rightarrow E_{ο\lambda} \simeq 450 \cdot 3{,}14 \simeq 1413\ cm^2$

**Κόστος βαψίματος της κατασκευής** $= \mathbf{1413 \cdot 0{,}01 = €14{,}13}$