

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2015

Μάθημα : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
4-ΩΡΟ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Πέμπτη, 21 Μαΐου 2015
8:00 – 11:00

ΜΕΡΟΣ Α΄ **ΛΥΣΕΙΣ**

| | | |
|-----------|--|--|
| 1. | <p>Κύβος έχει ακμή 5 cm. Να βρείτε:</p> <p>(α) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του.</p> <p>(β) Τον όγκο του.</p> <p>Λύση:</p> <p>(α) $E_{ολ} = 6 \cdot \alpha^2 = 6 \cdot 5^2 = 150 \text{ cm}^2$</p> <p>(β) $V = \alpha^3 = 5^3 = 125 \text{ cm}^3$</p> | |
| 2. | <p>Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ της συνάρτησης: $y = 2x^3 + 5x - 18$</p> <p>Λύση:</p> $\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 5$ | |
| 3. | <p>Ο αριθμός των τερμάτων που σημειώθηκαν αντίστοιχα στις πρώτες δέκα αγωνιστικές του Παγκύπριου Πρωταθλήματος Ποδοσφαίρου της Α΄ Κατηγορίας ήταν: 12, 10, 12, 13, 8, 13, 9, 12, 9, 12</p> <p>Να βρείτε:</p> <p>(α) Τη μέση τιμή του αριθμού των τερμάτων.</p> <p>(β) Τη διάμεσο του αριθμού των τερμάτων.</p> <p>Λύση:</p> <p>(α) $\bar{x} = \frac{12+10+12+13+8+13+9+12+9+12}{10} = \frac{110}{10} = 11$</p> <p>(β) 8, 9, 9, 10, 12, 12, 12, 12, 13, 13 άρα: $x_0 = \frac{12+12}{2} = \frac{24}{2} = 12$</p> | |

| | | |
|----|--|--|
| 4. | <p>Να βρείτε το ολοκλήρωμα: $\int (4x^3 - \sigma\upsilon\nu x) dx$</p> <p>Λύση:</p> $\int (4x^3 - \sigma\upsilon\nu x) dx = \frac{4x^4}{4} - \eta\mu x + c = x^4 - \eta\mu x + c$ | |
| 5. | <p>Δίνεται η λέξη ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ.</p> <p>Να βρείτε:</p> <p>(α) Το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.</p> <p>(β) Το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης που αρχίζουν με A και τελειώνουν σε A.</p> <p>Λύση:</p> <p>(α) $M_9^e = \frac{9!}{2! \cdot 2!} = 90720$</p> <p>(β) A _ _ _ _ _ A</p> $M_7^e = \frac{7!}{2!} = 2520$ | |
| 6. | <p>Να βρείτε τη γενική λύση της τριγωνομετρικής εξίσωσης: $\sigma\upsilon\nu 3x = \frac{1}{2}$</p> <p>Λύση:</p> $\sigma\upsilon\nu 3x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu 3x = \sigma\upsilon\nu 60^\circ \Rightarrow 3x = 360^\circ \kappa \pm 60^\circ$ $\Rightarrow x = 120^\circ \kappa \pm 20^\circ \quad \kappa \in \mathbb{Z}$ | |
| 7. | <p>Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο $K(-3, 2)$ και ακτίνα $R = 4$.</p> <p>Λύση:</p> $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$ | |

| | | |
|-----------|---|--|
| <p>8.</p> | <p>Μια μοτοσυκλέτα πωλήθηκε προς € 1472 μετά από έκπτωση 8 % . Να βρείτε την αρχική τιμή της μοτοσυκλέτας πριν την έκπτωση.</p> <p>Λύση:</p> $\begin{array}{r} 1472 \quad x \\ 92 \quad 100 \end{array}$ $x = \frac{1472 \cdot 100}{92} = 1600$ <p>Η τιμή πώλησης της μοτοσυκλέτας είναι €1600</p> | |
| <p>9.</p> | <p>Να λύσετε το σύστημα: $x + 2y = 5$ $y^2 - x = 3$</p> <p>Λύση:</p> $x + 2y = 5 \Rightarrow x = -2y + 5$ $\Rightarrow y^2 - (-2y + 5) = 3$ $\Rightarrow y^2 + 2y - 5 = 3$ $\Rightarrow y^2 + 2y - 8 = 0$ $\Rightarrow (y - 2)(y + 4) = 0 \Rightarrow y = 2 \text{ και } y = -4$ <p>Για $y = 2 \Rightarrow x = -2 \cdot 2 + 5 = 1 \quad (1, 2)$ Για $y = -4 \Rightarrow x = -2 \cdot (-4) + 5 = 13 \quad (13, -4)$</p> | |

10. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει ακμή βάσης 16 cm και ύψος 6 cm.

Να υπολογίσετε:

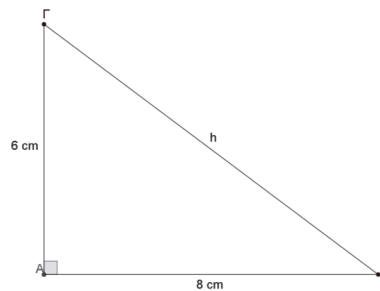
(α) Το παράπλευρο ύψος της πυραμίδας.

(β) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.

(γ) Τον όγκο της πυραμίδας.

Λύση:

$$\begin{aligned}h^2 &= 6^2 + 8^2 \\ \Rightarrow h^2 &= 36 + 64 = 100 \\ \Rightarrow h &= \sqrt{100} = 10 \text{ cm}\end{aligned}$$



$$E_{\text{ολ}} = E_{\pi} + E_{\beta} = \frac{\Pi_{\beta} \cdot h}{2} + E_{\beta} = \frac{64 \cdot 10}{2} + 16^2 = 320 + 256 = 576 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{E_{\beta} \cdot u}{3} = \frac{16^2 \cdot 6}{3} = 512 \text{ cm}^3$$

ΜΕΡΟΣ Β΄

1. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τις ελάχιστες ημερήσιες θερμοκρασίες σε βαθμούς κελσίου, που καταγράφηκαν τον Νοέμβριο του 2014, σε μια ορεινή κοινότητα της επαρχίας Λεμεσού.

| | | | | | | |
|--------------------------|---|---|---|----|---|----|
| Θερμοκρασία (x_i) | 3 | 4 | 6 | 8 | 9 | 10 |
| Αριθμός ημερών (f_i) | 5 | 3 | 3 | 10 | 5 | 4 |

Να βρείτε:

- (α) Την επικρατούσα τιμή (x_ε) των θερμοκρασιών.
(β) Τη μέση τιμή (\bar{x}) των θερμοκρασιών.
(γ) Την τυπική απόκλιση (σ) των θερμοκρασιών.

Λύση:

| x_i | f_i | $x_i \cdot f_i$ | $x_i - \bar{x}$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | $f_i(x_i - \bar{x})^2$ |
|-------|-------|-----------------|-----------------|---------------------|------------------------|
| 3 | 5 | 15 | -4 | 16 | 80 |
| 4 | 3 | 12 | -3 | 9 | 27 |
| 6 | 3 | 18 | -1 | 1 | 3 |
| 8 | 10 | 80 | 1 | 1 | 10 |
| 9 | 5 | 45 | 2 | 4 | 20 |
| 10 | 4 | 40 | 3 | 9 | 36 |
| | 30 | 210 | | | 176 |

$$\sum f_i = 30, \quad \sum (x_i \cdot f_i) = 210 \quad \sum (x_i - \bar{x})^2 = 176$$

(α) $x_\varepsilon = 8$

(β) $\bar{x} = \frac{210}{30} = 7$

(γ) $\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i(x_i - \bar{x})^2}{v}} = \sqrt{\frac{176}{30}} = \sqrt{5,866} \approx 2,422$

2. Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B') = \frac{2}{5}$ και $P(A \cap B) = \frac{9}{20}$. Να βρείτε τις πιθανότητες:

(α) $P(B)$

(β) $P(A \cup B)$

(γ) $P(B - A)$

(δ) $P(A/B)$

Λύση:

(α) $P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

(β) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
 $= \frac{3}{4} + \frac{3}{5} - \frac{9}{20}$
 $= \frac{9}{10}$

(γ) $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$
 $= \frac{3}{5} - \frac{9}{20}$
 $= \frac{3}{20}$

(δ) $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
 $= \frac{\frac{9}{20}}{\frac{3}{5}} = \frac{3}{4}$

3. Δίνεται η συνάρτηση: $y = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$

(α) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ της συνάρτησης.

(β) Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο $\frac{d^2y}{dx^2}$ της συνάρτησης.

(γ) Να δείξετε ότι: $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = -2\sigma\upsilon\nu x$

Λύση:

$$(α) \frac{dy}{dx} = \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x$$

$$(β) \frac{d^2y}{dx^2} = -\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$$

$$\begin{aligned} (γ) \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y &= -\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - (\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x) + 2(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) = \\ &= -\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x + 2\eta\mu x - 2\sigma\upsilon\nu x \\ &= -2\sigma\upsilon\nu x \end{aligned}$$

4. Ο κύριος Κωνσταντίνος θέλει να κατασκευάσει ένα ντεπόζιτο από λαμαρίνα σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, το οποίο θα είναι ανοικτό στο πάνω μέρος του. Το ντεπόζιτο θα έχει βάση με διαστάσεις 3 m και 2 m και το ύψος του θα είναι 1 m. Θα το βάψει εξωτερικά με ειδική αντισεισμική βαφή. Το κόστος αγοράς της λαμαρίνας είναι € 10 το τετραγωνικό μέτρο, η βαφή του ντεποζίτου κοστίζει € 5 το τετραγωνικό μέτρο και τα εργατικά έξοδα κατασκευής του ντεποζίτου είναι € 120.

(α) Να υπολογίσετε το συνολικό κόστος κατασκευής του ντεποζίτου.

(β) Αν ο κύριος Κωνσταντίνος πωλήσει το ντεπόζιτο στην τιμή των € 432, να βρείτε το ποσοστό του κέρδους στο συνολικό κόστος κατασκευής του ντεποζίτου.

Λύση:

$$\begin{aligned}(\alpha) E_{\text{ολ}} &= \alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma \\ &= 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 = \\ &= 6 + 6 + 4 = 16 \text{ m}^2\end{aligned}$$

Συνολικό κόστος κατασκευής:

$$16 \cdot 10 = \text{€}160$$

$$16 \cdot 5 = \text{€}80$$

$$160 + 80 + 120 = \text{€}360$$

$$(\beta) \text{ Κέρδος: } 432 - 360 = \text{€}72$$

$$\text{Ποσοστό κέρδους: } \frac{72}{360} \cdot 100\% = 20\%$$

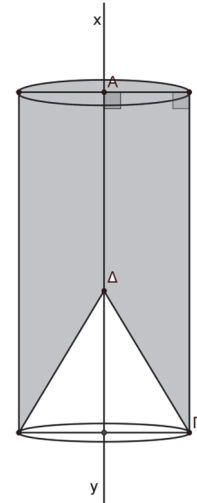
$$\text{ή } \frac{432}{360} \cdot 100\% = 120\%$$

$$\text{Άρα το ποσοστό κέρδους είναι: } 120 - 100 = 20\%$$

5. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο τραπέζιο με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 90^\circ$, $AB = 3 \text{ cm}$, $B\Gamma = 12 \text{ cm}$ και $\Gamma\Delta = 5 \text{ cm}$. Το ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα xy .

Να βρείτε:

- (α) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται.
 (β) Τον όγκο του στερεού που παράγεται.



Λύση:

Στοιχεία κυλίνδρου:

$$R = 3 \text{ cm}$$

$$u_{B\Gamma} = 12 \text{ cm}$$

$$E_{\text{κυρτής κυλίνδρου}} = 2\pi R u_{B\Gamma} = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 12 = 72\pi \text{ cm}^2$$

$$E_{\text{βάσης κυλίνδρου}} = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{κυλίνδρου}} = \pi R^2 u_{B\Gamma} = \pi \cdot 3^2 \cdot 12 = 108\pi \text{ cm}^3$$

Στοιχεία κώνου:

$$R = 3 \text{ cm}$$

$$\lambda = 5 \text{ cm} \quad u_{\kappa\omega} = ?;$$

$$\text{Π.Θ.} \quad 5^2 = u_{\kappa\omega}^2 + 3^2$$

$$u_{\kappa\omega}^2 = 25 - 9$$

$$u_{\kappa\omega}^2 = 16$$

$$u_{\kappa\omega} = 4 \text{ cm}$$

$$E_{\text{κυρτής κώνου}} = \pi R \lambda = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{κώνου}} = \frac{\pi R^2 u_{\kappa\omega}}{3} = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 4}{3} = 12\pi \text{ cm}^3$$

$$E_{\text{ολ}} = E_{\text{κυρτής κυλίνδρου}} + E_{\text{κυρτής κώνου}} + E_{\text{βάσης}} = 72\pi + 15\pi + 9\pi = 96\pi \text{ cm}^2$$

$$V = V_{\text{κυλίνδρου}} - V_{\text{κώνου}} = 108\pi - 12\pi = 96\pi \text{ cm}^3$$

