

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2013

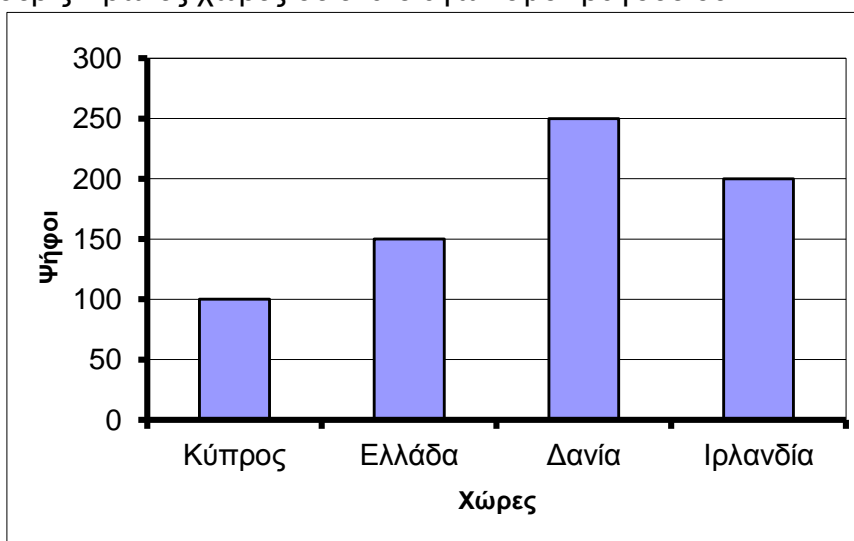
Μάθημα : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
4-ΩΡΟ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Τετάρτη, 22 Μαΐου 2013
11:00 – 14:00

ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄

1. Στο πιο κάτω ραβδόγραμμα φαίνεται ο αριθμός των ψήφων που πήραν οι τέσσερις πρώτες χώρες σε ένα διαγωνισμό τραγουδιού.

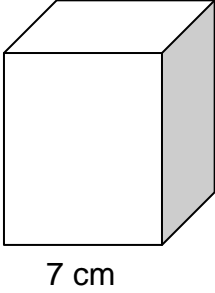


Να βρείτε:

- (α) Τη χώρα που πήρε τις περισσότερες ψήφους και πόσες ήταν οι ψήφοι που πήρε.
(β) Τις ψήφους που πήραν συνολικά και οι τέσσερις χώρες.

Λύση:

- (α) Η Δανία πήρε τις περισσότερες ψήφους, που ήταν 250.
(β) Συνολικά πήραν $(100+150+250+200)=700$ ψήφους.

2.	<p>Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ της συνάρτησης: $y = \eta\mu x - 3x - 15$</p> <p>Λύση:</p> $y = \eta\mu x - 3x - 15 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sigma\upsilon\nu x - 3$	
3.	<p>Κύβος έχει ακμή 7 cm. Να βρείτε:</p> <p>(α) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του. (β) Τον όγκο του.</p> <p>Λύση: $a=7$ cm (α) $E_{ολ} = 6a^2$ $= 6 \cdot 7^2$ $= 6 \cdot 49$ $E_{ολ} = 294 \text{ cm}^2$</p> <p>(β) $V = a^3$ $= 7^3$ $V = 343 \text{ cm}^3$</p>	
4.	<p>Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης ΜΑΡΜΑΡΟ.</p> <p>Λύση:</p> $M_7^e = \frac{7!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{5040}{8} = 630 \text{ αναγραμματισμοί.}$	
5.	<p>Ο κύριος Χριστόδουλος θα αγοράσει ένα αυτοκίνητο που έχει τιμή €3500. Να βρείτε πόσα θα πληρώσει, αν του γίνει έκπτωση 15% πάνω στην τιμή πώλησης.</p> <p>Λύση:</p> <p>Έκπτωση: $3500 \cdot \frac{15}{100} = €525$</p> <p>Τιμή πώλησης: $3500 - 525 = €2975$</p>	

6.	<p>Να βρείτε το ολοκλήρωμα: $\int(6x^2 + 8x - 1)dx$</p> <p>Λύση:</p> $\int(6x^2 + 8x - 1)dx = \frac{6x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} - x + c$ $= 2x^3 + 4x^2 - x + c$	
7.	<p>Να βρείτε τις γενικές λύσεις της τριγωνομετρικής εξίσωσης: $\eta\mu 2x = \eta\mu 80^\circ$</p> <p>Λύση:</p> $\eta\mu 2x = \eta\mu 80^\circ \Rightarrow 2x = 360^\circ k + 80^\circ$ $\Rightarrow x = 180^\circ k + 40^\circ \quad k \in \mathbf{Z}$ $\eta\mu 2x = \eta\mu 80^\circ \Rightarrow 2x = 360^\circ k + 180^\circ - 80^\circ$ $\Rightarrow 2x = 360^\circ k + 100^\circ$ $\Rightarrow x = 180^\circ k + 50^\circ \quad k \in \mathbf{Z}$	
8.	<p>Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και το μήκος της ακτίνας του κύκλου: $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 16$</p> <p>Λύση:</p> $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$ $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 4^2$ <p>Οι συντεταγμένες του κέντρου είναι $(-5, 2)$ Το μήκος της ακτίνας του κύκλου είναι 4.</p>	

<p>9.</p>	<p>Αν Α και Β είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου με $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ και $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$, να βρείτε τις πιθανότητες:</p> <p>(α) $P(A')$</p> <p>(β) $P(B)$</p> <p>(γ) $P(A - B)$</p> <p>Λύση:</p> <p>(α) $P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$</p> <p>(β) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$</p> $\Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{4} + P(B) - \frac{1}{6}$ $\Rightarrow P(B) = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{8-3+2}{12} = \frac{7}{12}$ <p>(γ) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$</p> $= \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3-2}{12} = \frac{1}{12}$	
<p>10.</p>	<p>Να λύσετε το σύστημα:</p> $\begin{cases} y - x = 5 \\ x^2 + y = 7 \end{cases}$ <p>Λύση:</p> $\begin{cases} y - x = 5 \\ x^2 + y = 7 \end{cases}$ $y - x = 5 \Rightarrow y = x + 5$ $x^2 + (x + 5) = 7 \Rightarrow$ $x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow$ $(x + 2)(x - 1) = 0$ $\Rightarrow x = -2 \quad \text{ή} \quad x = 1$ <p>Αν $x = -2 \Rightarrow y = x + 5 = -2 + 5 = 3$ Αν $x = 1 \Rightarrow y = x + 5 = 1 + 5 = 6$</p> <p>Λύσεις: $(x, y) = (-2, 3)$, $(x, y) = (1, 6)$</p>	

ΜΕΡΟΣ Β΄

1. Ο κύριος Δημήτρης αγόρασε ένα μεταχειρισμένο ταχύπλοο σκάφος και πλήρωσε €22000. Είχε επιπλέον έξοδα μεταφοράς €350 και έξοδα επιδιόρθωσης €1650. Στη συνέχεια πώλησε το σκάφος προς €32000 στον κύριο Κώστα.

(α) Να υπολογίσετε το ποσοστό κέρδους του κυρίου Δημήτρη πάνω στο συνολικό κόστος του σκάφους.

(β) Αν ο κύριος Κώστας επιβαρύνθηκε επιπλέον με 18% Φ.Π.Α. πάνω στην τιμή πώλησης, να υπολογίσετε πόσα πλήρωσε συνολικά για την αγορά του σκάφους.

Λύση:

Κόστος ταχύπλοου = €22000

Κόστος ταχύπλοου + έξοδα = €22000 + €350 + €1650 = €24000

Πώληση = €32000,

Κέρδος = €32000 – €24000 = €8000

(α) Ποσοστό κέρδους = $\frac{8000}{24000} \cdot 100\% = 33\frac{1}{3}\%$

(β) 18% Φ.Π.Α. $\Rightarrow \frac{18}{100} \cdot €32000 = €5760.$

Συνολικά ο κύριος Κώστας πλήρωσε = €32000 + €5760 = €37760.

2. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό των τερμάτων που πέτυχε μια ομάδα της Α' κατηγορίας, στους 32 αγώνες του πρωταθλήματος ποδοσφαίρου που έλαβε μέρος.

Αριθμός τερμάτων (x_i)	0	1	2	3	4	5
Αριθμός αγώνων (f_i)	5	10	5	6	4	2

Να βρείτε:

(α) Την επικρατούσα τιμή (x_e).

(β) Τη μέση τιμή (\bar{x}).

(γ) Την τυπική απόκλιση (σ).

Λύση:

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
0	5	0	-2	4	20
1	10	10	-1	1	10
2	5	10	0	0	0
3	6	18	1	1	6
4	4	16	2	4	16
5	2	10	3	9	18
	32	64			70

(α) $x_e = 1$

(β) $\bar{x} = \frac{64}{32} = 2$

(γ) $\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i(x_i - \bar{x})^2}{v}} = \sqrt{\frac{70}{32}} = \sqrt{2,1875} \approx 1,48$

3. Ένα Ευρωπαϊκό πρόγραμμα προώθησης του αγροτουρισμού θα επιχορηγήσει 4 χωριά της Κύπρου. Η επιλογή θα γίνει ανάμεσα σε 6 χωριά της επαρχίας Λεμεσού και 3 χωριά της επαρχίας Λάρνακας. Να βρείτε:

- (α) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή των τεσσάρων χωριών που θα επιχορηγηθούν.
- (β) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή των τεσσάρων χωριών που θα επιχορηγηθούν, αν τα δύο από αυτά πρέπει να είναι της επαρχίας Λάρνακας.
- (γ) Την πιθανότητα να επιχορηγηθούν μόνο χωριά της επαρχίας Λεμεσού.

Λύση:

$$(α) \binom{9}{4} = 126 \text{ επιλογές}$$

$$(β) \binom{6}{2} \binom{3}{2} = 15 \cdot 3 = 45 \text{ επιλογές}$$

$$(γ) P = \frac{\binom{6}{4}}{\binom{9}{4}} = \frac{15}{126} = \frac{5}{42}$$

4. Δίνεται η συνάρτηση: $y = x^3 - 2x^2 + 3$

(α) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ της συνάρτησης.

(β) Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο $\frac{d^2y}{dx^2}$ της συνάρτησης.

(γ) Να δείξετε ότι: $x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - 2\left(\frac{dy}{dx}\right) - 4x = 0$

Λύση:

$$(α) \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x$$

$$(β) \frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 4$$

$$\begin{aligned} (γ) x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - 2\left(\frac{dy}{dx}\right) - 4x &= x(6x - 4) - 2(3x^2 - 4x) - 4x \\ &= 6x^2 - 4x - 6x^2 + 8x - 4x = 0 \end{aligned}$$

5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), με $AB = 4$ cm και $B\Gamma = 5$ cm. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα xy , που είναι παράλληλος προς την πλευρά AB και απέχει 1 cm από αυτή. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.

Λύση:

Στοιχεία κυλίνδρου:

$$\rho = 1 \text{ cm}$$

$$u = 4 \text{ cm}$$

Στοιχεία κώλου κώνου:

$$\text{Π.Θ. } 5^2 = (A\Gamma)^2 + 4^2$$

$$(A\Gamma)^2 = 25 - 16$$

$$(A\Gamma)^2 = 9$$

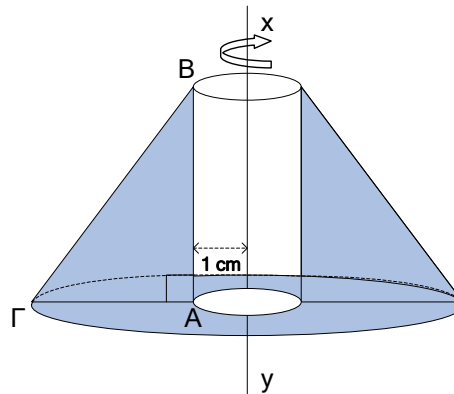
$$(A\Gamma) = 3 \text{ cm}$$

$$R = 1 + 3 = 4 \text{ cm}$$

$$\rho = 1 \text{ cm}$$

$$u = 4 \text{ cm}$$

$$\lambda = 5 \text{ cm}$$



$$E_{\text{ολ}} = E_{\text{Κ κώλ.}} + E_{\text{Κ κυλ}} + E_{\text{δακτυλ}}$$

$$= \pi(R + \rho) \cdot \lambda + 2\pi\rho \cdot u + (\pi R^2 - \pi\rho^2)$$

$$= \pi(4 + 1) \cdot 5 + 2\pi \cdot 1 \cdot 4 + (\pi \cdot 4^2 - \pi \cdot 1^2)$$

$$= 25\pi + 8\pi + 15\pi$$

$$= 48\pi \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{ολ}} = V_{\text{κώλου κώνου}} - V_{\text{κυλίνδρου}}$$

$$= \frac{\pi u}{3} (R^2 + R\rho + \rho^2) - \pi\rho^2 u$$

$$= \frac{\pi \cdot 4}{3} (4^2 + 4 \cdot 1 + 1^2) - \pi \cdot 1^2 \cdot 4$$

$$= \frac{\pi \cdot 4}{3} (16 + 4 + 1) - 4\pi$$

$$= 28\pi - 4\pi$$

$$= 24\pi \text{ cm}^3$$