

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2013

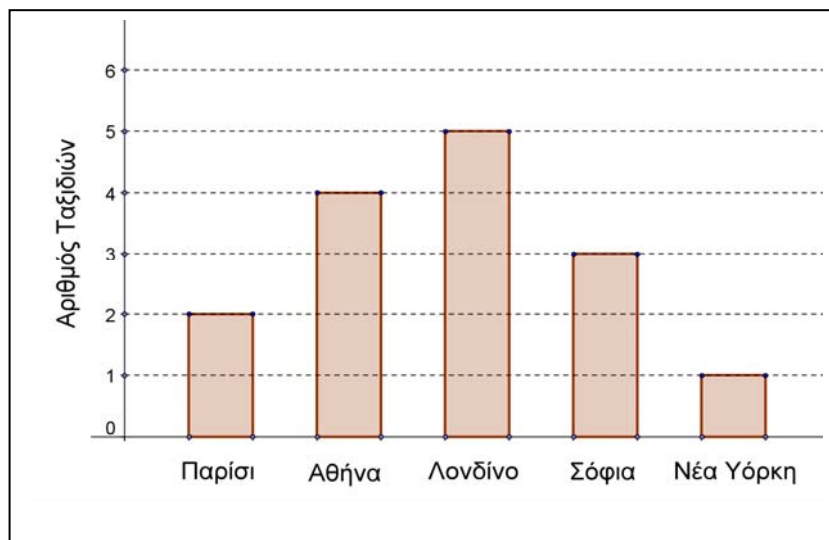
Μάθημα : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
2-ΩΡΟ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: ΔΕΥΤΕΡΑ 20/5/2013
11:00 – 14:00

Λ Υ Σ Ε Ι Σ

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Στο πιο κάτω ραβδόγραμμα φαίνεται ο αριθμός των ταξιδιών που έχει κάνει η κα. Ελένη σε διάφορες πόλεις.



Να βρείτε:

- a) Πόσα ταξίδια έχει κάνει στη Νέα Υόρκη.
- b) Σε ποια πόλη έχει κάνει τα περισσότερα ταξίδια.
- c) Πόσα ταξίδια έχει κάνει συνολικά.

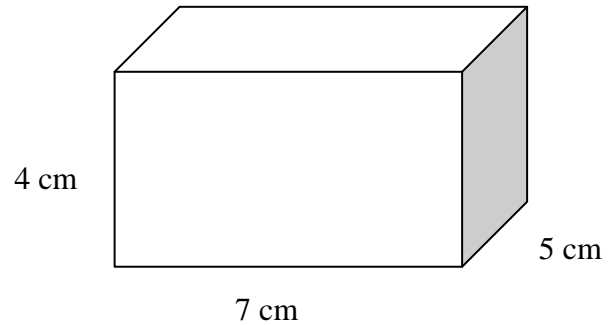
Λύση:

- a) Στη Νέα Υόρκη έχει κάνει 1 ταξίδι.
- b) Τα περισσότερα ταξίδια τα έκανε στο Λονδίνο.
- c) Συνολικά έκανε $2 + 4 + 5 + 3 + 1 = 15$ ταξίδια.

2. Να βρείτε τον όγκο ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου που έχει μήκος 7 cm, πλάτος 5 cm και ύψος 4 cm.

Λύση:

$$\begin{aligned} V &= \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \\ &= 7 \cdot 5 \cdot 4 \\ &= 140 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$



3. Σε ένα κατάστημα κινητής τηλεφωνίας, η τιμή ενός κινητού τηλεφώνου είναι €350 χωρίς Φ.Π.Α. Πόσα θα πληρώσει για το κινητό τηλέφωνο ένας αγοραστής που θα πληρώσει επιπλέον και 18% Φ.Π.Α.;

Λύση:

$$\text{Φ.Π.Α. } 18\% \Rightarrow \frac{18}{100} \cdot 350 = \text{€}63.$$

$$\text{Συνολική αξία με Φ.Π.Α.} \Rightarrow 350 + 63 = \text{€}413.$$

Ο αγοραστής θα πληρώσει συνολικά €413.

4. Το βάρος (σε κιλά) πέντε παιδιών είναι: 80, 60, 55, 65, 90. Να βρείτε το μέσο όρο του βάρους τους.

Λύση:

$$\bar{X} = \frac{\text{Συνολικό βάρος}}{5} \Rightarrow \bar{X} = \frac{80 + 60 + 55 + 65 + 90}{5} = \frac{350}{5} = 70 \text{ Kg}$$

Ο μέσος όρος του βάρους είναι 70 Kg.

5. Η ακτίνα της βάσης κώνου είναι 12 cm και η γενέτειρα του 13 cm .

Να βρείτε:

- a) το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του, και
b) τον όγκο του.

Λύση:

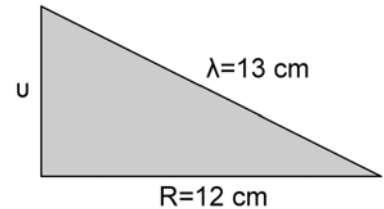
$$R = 12 \text{ cm}, \lambda = 13 \text{ cm}, u = ?$$

Πυθαγόρειο Θεώρημα :

$$\lambda^2 = u^2 + R^2 \Rightarrow 13^2 = u^2 + 12^2$$

$$169 = u^2 + 144 \Rightarrow u^2 = 169 - 144$$

$$u^2 = 25 \Rightarrow u = 5 \text{ cm}$$



a) $E_k = \pi R \lambda = \pi \cdot 12 \cdot 13 = 156\pi \text{ cm}^2$

b) $V = \frac{\pi R^2 u}{3} = \frac{\pi \cdot 144 \cdot 5}{3} = 240\pi \text{ cm}^3$

6. Η περίμετρος της βάσης κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας είναι 64 cm και το ύψος της είναι 6 cm. Να βρείτε:

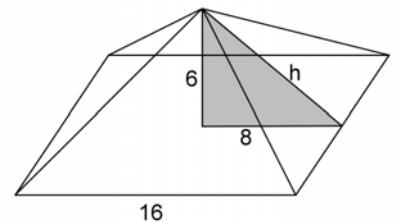
- a) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας, και
b) τον όγκο της πυραμίδας.

Λύση:

$$\Pi_{\beta} = 64 \text{ cm} \Rightarrow 4\alpha = 64 \Rightarrow \alpha = \frac{64}{4} = 16 \text{ cm.}$$

$$h^2 = u^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$h^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow h^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow h = 10 \text{ cm}$$



a) $E_{ολ} = E_{\pi} + E_{\beta} = \frac{\Pi_{\beta} \cdot h}{2} + \alpha^2 =$
 $= \frac{64 \cdot 10}{2} + 16^2 = 320 + 256 = 576 \text{ cm}^2$

b) $V = \frac{E_{\beta} \cdot u}{3} = \frac{256 \cdot 6}{3} = 512 \text{ cm}^3$

7. Ένα άρωμα πωλείται σε δύο διαφορετικές συσκευασίες στην ίδια τιμή. Η μια συσκευασία είναι σε μπουκάλι σχήματος κύβου με ακμή 4 cm και η άλλη σε μπουκάλι σχήματος τετραγωνικού πρίσματος με πλευρά βάσης 3 cm και ύψος 7 cm. Να βρείτε ποια συσκευασία μας συμφέρει να αγοράσουμε και να δικαιολογήσετε.

Λύση:

$$V_{\text{κύβου}} = a^3 = 4^3 = 64 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{πρίσματος}} = E_{\beta} \cdot u = 3^2 \cdot 7 = 63 \text{ cm}^3$$

Μας συμφέρει να αγοράσουμε το μπουκάλι σχήματος κύβου γιατί περιέχει 1 cm^3 περισσότερο άρωμα.

8. Το εμβαδόν της βάσης κυλίνδρου είναι $25\pi \text{ m}^2$ και το ύψος του 10 m. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου.

Λύση:

$$E_{\beta} = \pi R^2 \Rightarrow 25\pi = \pi R^2 \Rightarrow R^2 = 25 \Rightarrow R = \sqrt{25} \Rightarrow R = 5 \text{ m}$$

$$E_{\text{ολ}} = E_{\kappa} + 2E_{\beta} = 2\pi \cdot 5 \cdot 10 + 2 \cdot 25\pi = 100\pi + 50\pi = 150\pi \text{ m}^2$$

9. Μια φρουταρία αγόρασε 260 κιλά κεράσια προς €1,80 το κιλό και 250 κιλά μέσπιλα προς €0,90 το κιλό. Πώλησε τα κεράσια με ζημιά 15% και τα μέσπιλα με κέρδος 30%. Να βρείτε το κέρδος ή τη ζημιά (σε ευρώ) της φρουταρίας.

Λύση:

$$\text{Κόστος κερασιών} = 260 \cdot 1,80 = \text{€} 468$$

$$\text{Κόστος μέσπιλων} = 250 \cdot 0,90 = \text{€} 225$$

$$\text{Συνολικό Κόστος} = 468 + 225 = \text{€} 693$$

$$\text{Είσπραξη από κεράσια} = \frac{85}{100} \cdot 468 = \text{€} 397,80$$

$$\text{Είσπραξη από μέσπιλα} = \frac{130}{100} \cdot 225 = \text{€} 292,50$$

$$\text{Συνολική Είσπραξη} = 397,80 + 292,50 = \text{€} 690,30$$

$$\text{Ζημιά} = 693 - 690,30 = \text{€} 2,70$$

10. Ο μέσος εβδομαδιαίος μισθός 5 υπαλλήλων είναι €140. Προστέθηκαν σε αυτούς ακόμη τρεις υπάλληλοι με μισθούς €180, €176 και €160. Να υπολογίσετε το μέσο όρο των μισθών των 8 υπαλλήλων.

Λύση:

$$\bar{X}_5 = \frac{\Sigma_5}{5} = €140 \Rightarrow \Sigma_5 = 140 \cdot 5 = €700$$

$$\Sigma_8 = \Sigma_5 + 180 + 176 + 160 = 700 + 516 = €1216 \Rightarrow$$

$$\bar{X}_8 = \frac{\Sigma_8}{8} = \frac{1216}{8} = €152$$

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Έμπορος αγόρασε από εργοστάσιο 50 τηλεοράσεις για €20000. Πλήρωσε για μεταφορικά 15% πάνω στο κόστος των τηλεοράσεων. Να βρείτε:

- πόσα πρέπει να πωλεί ο έμπορος την κάθε τηλεόραση, ώστε να κερδίζει 20% επί του ολικού κόστους.
- πόσα θα κοστίσει μια τηλεόραση στον καταναλωτή που θα πληρώσει επιπλέον και 18% Φ.Π.Α.

Λύση:

a) Μια τηλεόραση: $\frac{20000}{50} = €400$

Μαζί με τα μεταφορικά: $\frac{115}{100} \cdot 400 = €460$

Η τιμή πώλησης με το κέρδος: $\frac{120}{100} \cdot 460 = €552$

b) Η τιμή πώλησης με το Φ.Π.Α.: $\frac{118}{100} \cdot 552 = €651,36$

2. Η αστυνομία κατέγραψε στην είσοδο μιας πόλης, τον αριθμό των ατόμων που επέβαιναν σε 100 αυτοκίνητα. Τα αποτελέσματα της καταγραφής φαίνονται στον πιο κάτω πίνακα κατανομής συχνοτήτων.

Αρ. Ατόμων (x_i)	1	2	3	4	5
Αρ. Αυτοκινήτων (f_i)	44	30	15	4	7

- a) Να βρείτε την επικρατούσα τιμή (x_ε) και τη διάμεσο (x_δ).
 b) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή (\bar{x}) και την τυπική απόκλιση (σ) του αριθμού των ατόμων με προσέγγιση 2 δεκαδικών ψηφίων.

Λύση:

- a) Επικρατούσα τιμή: $x_\varepsilon = 1$

$$\text{Διάμεσος: } \frac{n+1}{2} = \frac{100+1}{2} = 50,5 \Rightarrow \begin{cases} 50^{\text{ος}} \rightarrow 2 \\ 51^{\text{ος}} \rightarrow 2 \end{cases} \Rightarrow x_\delta = 2$$

β)

x_i	f_i	$x_i f_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i (x_i - \bar{x})^2$
1	44	44	1	44
2	30	60	0	0
3	15	45	1	15
4	4	16	4	16
5	7	35	9	63
	$\Sigma f_i = 100$	$\Sigma x_i f_i = 200$		$\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2 = 138$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i f_i}{\Sigma f_i} = \frac{200}{100} = 2 \text{ άτομα.}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2}{\Sigma f_i}} = \sqrt{\frac{138}{100}} = 1,17 \text{ άτομα}$$

3. Μια εταιρεία πετρελαιοειδών ζητά προσφορές για την κατασκευή 20 μεταλλικών ντεπόζιτων. Κάθε ντεπόζιτο θα πρέπει να έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με μήκος 6 m, πλάτος 4 m, ύψος 3 m και θα πρέπει να είναι ανοικτό στο πάνω μέρος του. Το υλικό κατασκευής στοιχίζει €15 το τετραγωνικό μέτρο και τα εργατικά €8 το τετραγωνικό μέτρο. Να βρείτε ποια θα είναι η προσφορά (σε ευρώ) που πρέπει να κάνει ένας κατασκευαστής, ώστε να έχει κέρδος 25% επί του συνολικού κόστους.

Λύση:

Για 1 ντεπόζιτο:

$$E_{ολ} = αβ + 2αγ + 2βγ = 6 \cdot 4 + 2 \cdot 6 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 3 = 24 + 36 + 24 = 84 \text{ m}^2$$

Κόστος Υλικού κατασκευής: $84 \cdot €15 = €1260$

Εργατικά: $84 \cdot €8 = €672$

Συνολικό κόστος: $€1260 + €672 = €1932$

Για τα 20 ντεπόζιτα: $20 \cdot €1932 = €38640$

Μαζί με το κέρδος: $\frac{125}{100} \cdot €38640 = €48300$

Η προσφορά θα είναι: €48300

4. Στο διπλανό κυκλικό διάγραμμα φαίνεται η κατανομή των 630 μαθητών μιας Τεχνικής Σχολής σε κλάδους.

Να υπολογίσετε:

- τον αριθμό των μαθητών που επέλεξαν Μηχανολογία,
- τον αριθμό των μαθητών που επέλεξαν Ξενοδοχειακά, και
- το ποσοστό (%) των μαθητών που επέλεξαν Κομμωτική.



Λύση:

α) Μηχανολογία: $\frac{160}{360} \cdot 630 = 280$ μαθητές

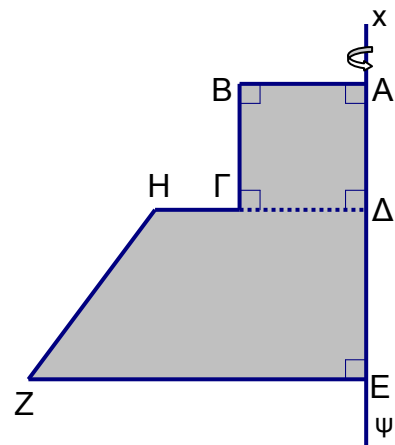
β) Ξενοδοχειακά: $360^\circ - 120^\circ - 160^\circ = 80^\circ$

$$\frac{80}{360} \cdot 630 = 140 \text{ μαθητές}$$

γ) Κομμωτικής: $\frac{120}{360} = \frac{120}{360} \cdot 100\% = 33,33\%$

5. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο με πλευρά 3 cm και το τετράπλευρο ΔHZE ορθογώνιο τραπέζιο ($\hat{A} = \hat{E} = 90^\circ$), με $\Delta E = 4\text{ cm}$, $EZ = 8\text{ cm}$ και $H\Gamma = 2\text{ cm}$.

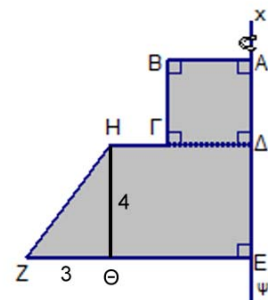
Το σκιασμένο σχήμα περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα $\chi\psi$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.



Λύση: Κατά την περιστροφή θα προκύψει κύλινδρος και κώλυρος κώνος.

Πυθ.Θεωρ. στο τρίγωνο $ZH\Theta$:

$$HZ = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \Rightarrow HZ = 5\text{ cm}$$



Κύλινδρος	Κώλυρος Κώνος
$\rho = 3\text{ cm}$	$r = 5\text{ cm}$
$u_1 = 3\text{ cm}$	$R = 8\text{ cm}$
	$u_2 = 4\text{ cm}$
	$\lambda = 5\text{ cm}$

$$\begin{aligned} E &= E_{AB} + E_{B\Gamma} + E_{H\Gamma} + E_{HZ} + E_{ZE} = \\ &= E_{\text{βάσης κυλ.}} + E_{\text{κυρτής κυλ.}} + E_{\text{δακτυλίου}} + E_{\text{κυρτής κολ. κων.}} + E_{\text{βάσης κολ. κων.}} = \\ &= \pi\rho^2 + 2\pi\rho u_1 + \pi r^2 - \pi\rho^2 + \pi(R+r)\lambda + \pi R^2 = \\ &= \pi \cdot 3^2 + 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 3 + \pi \cdot 5^2 - \pi \cdot 3^2 + \pi \cdot (8+5) \cdot 5 + \pi \cdot 8^2 = \\ &= 9\pi + 18\pi + 25\pi - 9\pi + 65\pi + 64\pi = \\ &= 172\pi\text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= V_{\text{κυλ.}} + V_{\text{κολ.κώνου}} = \pi\rho^2 u_1 + \frac{\pi u_2}{3} (R^2 + Rr + r^2) = \\ &= \pi \cdot 3^2 \cdot 3 + \frac{\pi \cdot 4}{3} (8^2 + 8 \cdot 5 + 5^2) = 27\pi + 172\pi = \\ &= 199\pi\text{ cm}^3 \end{aligned}$$