

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ  
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ  
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2012

Μάθημα : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
4-ΩΡΟ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Πέμπτη, 24 Μαΐου 2012  
10:30 – 13:30

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄:

1.	<p>Η κυρία Αναστασία έχει 8 παιδιά με ηλικίες 16, 14, 11, 10, 8, 6, 4 και 3 χρονών. Να βρείτε τη μέση τιμή των ηλικιών των 8 παιδιών της.</p> <p><b>ΛΥΣΗ</b></p> $\bar{x} = \frac{16+14+11+10+8+6+4+3}{8}$ $\bar{x} = \frac{72}{8} = 9$	
2.	<p>Να βρείτε την παράγωγο <math>\frac{dy}{dx}</math> της συνάρτησης <math>y = x^3 + 5x^2 + 2</math></p> <p><b>ΛΥΣΗ</b></p> $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 10x$	
3.	<p>Να βρείτε το ολοκλήρωμα <math>\int (x^2 + \frac{2}{x^4}) dx</math></p> <p><b>ΛΥΣΗ</b></p> $\int (x^2 + \frac{2}{x^4}) dx = \int (x^2 + 2x^{-4}) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3x^3} + c$	
4.	<p>Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και το μήκος της ακτίνας του κύκλου με εξίσωση <math>x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0</math></p> <p><b>ΛΥΣΗ</b></p> $K(-g, -f) \quad K(-1, 2)$ $R = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$	

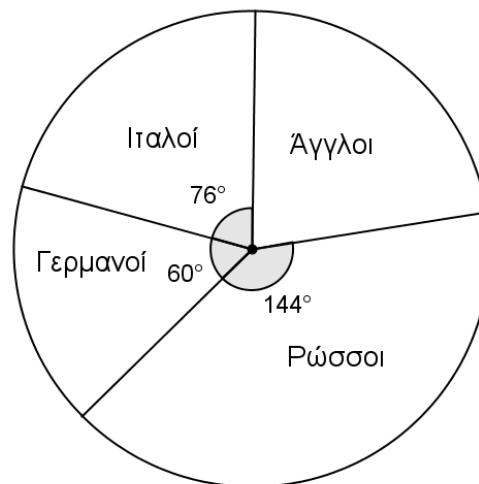
5.	<p>Να υπολογίσετε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης <b>ΠΡΟΣΒΑΣΗ</b>. Να υπολογίσετε πόσοι από αυτούς έχουν τα γράμματα Π και Β συνεχόμενα.</p> <p><b>ΛΥΣΗ</b></p> <p>(α) <math>M_8^ε = \frac{8!}{2!} = 20160</math></p> <p>(β) <math>M_7^ε \cdot M_2 = \frac{7!}{2!} \cdot 2! = 5040</math></p>	
6.	<p>Να υπολογίσετε το όριο <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5+2x}{x^2+6x}</math></p> <p><b>ΛΥΣΗ</b></p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5+2x}{x^2+6x} = \left( \frac{\infty}{\infty} \text{ ΜΕΠ} \right)$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{2x+6}$ $= \frac{2}{\infty} = 0$	
7.	<p>Να βρείτε την παράγωγο <math>\frac{dy}{dx}</math> της συνάρτησης <math>y = x \cdot \sqrt{x^2+2}</math></p> <p><b>ΛΥΣΗ</b></p> $\frac{dy}{dx} = (x)' \cdot \sqrt{x^2+2} + x \cdot (\sqrt{x^2+2})'$ $\frac{dy}{dx} = 1 \cdot \sqrt{x^2+2} + x \cdot \left( \frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}} \right)$ $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2+2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{2x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}$	

<p>8.</p>	<p>Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με</p> $P(A) = \frac{1}{2}, P(B') = \frac{1}{3} \text{ και } P(A \cup B) = \frac{5}{6}.$ <p>Να υπολογίσετε τις πιθανότητες:</p> <p>(α) P(B)</p> <p>(β) P(A ∩ B)</p> <p>(γ) P(A – B)</p> <p><b><u>ΛΥΣΗ</u></b></p> <p>(α) <math>P(B) = 1 - P(B')</math></p> $= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ <p>(β) <math>P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)</math></p> $P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ <p>(γ) <math>P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)</math></p> $= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$	
<p>9.</p>	<p>Αν <math>y = 3\sigma\upsilon\nu 2x - 5\eta\mu 2x</math>, να δείξετε ότι <math>\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0</math></p> <p><b><u>ΛΥΣΗ</u></b></p> $\frac{dy}{dx} = -6\eta\mu 2x - 10\sigma\upsilon\nu 2x$ $\frac{d^2y}{dx^2} = -12\sigma\upsilon\nu 2x + 20\eta\mu 2x$ $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = -12\sigma\upsilon\nu 2x + 20\eta\mu 2x + 4(3\sigma\upsilon\nu 2x - 5\eta\mu 2x)$ $= -12\sigma\upsilon\nu 2x + 20\eta\mu 2x + 12\sigma\upsilon\nu 2x - 20\eta\mu 2x$ $= 0$	

10

Το κυκλικό διάγραμμα του διπλανού σχήματος παρουσιάζει την εθνικότητα των 540 επιβατών ενός κρουαζιερόπλοιου, που κατέπλευσε στη Λεμεσό.  
Να βρείτε:

- (α) Τον αριθμό των Γερμανών επιβατών .  
 (β) Τον αριθμό των Άγγλων επιβατών.  
 (γ) Τι ποσοστό (%) των επιβατών αποτελούν οι Ρώσσοι επιβάτες.



### ΛΥΣΗ

$$(α) \text{ ΓΕΡΜΑΝΟΙ : } \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot 540 = 90$$

$$(β) 360^\circ - (60^\circ + 144^\circ + 76^\circ) = 80^\circ$$

$$\text{ΑΓΓΛΟΙ: } \frac{80^\circ}{360^\circ} \cdot 540 = 120$$

$$(γ) \text{ ΡΩΣΣΟΙ (ΠΟΣΟΣΤΟ): } x = \frac{144^\circ}{360^\circ} \cdot \frac{100}{100} = 40\%$$

**ΜΕΡΟΣ Β΄:**

1. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο  $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα, τις ασύμπτωτες της συνάρτησης και στη συνέχεια να την παραστήσετε γραφικά.

**ΛΥΣΗ**

(α) Πεδίο ορισμού:  $\mathbb{R} - \{-1\}$

(β) Σημεία τομής: άξονας  $yy'$ :  $x = 0 \Rightarrow y = 1$  (0,1)

άξονας  $xx'$ :  $y = 0 \Rightarrow x = 1$  (1,0)

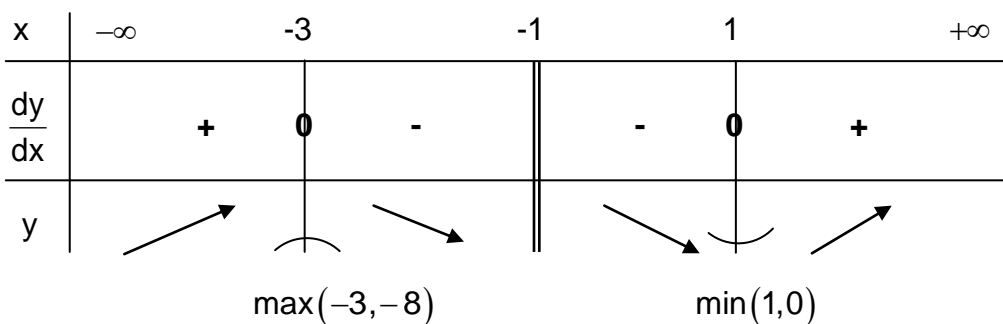
(γ) Μονοτονία – Ακρότατα:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x - 2)(x + 1) - (x^2 - 2x + 1) \cdot 1}{(x + 1)^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2} \\ \frac{dy}{dx} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x + 3)(x - 1) = 0$$

$$x = -3 \quad x = 1$$



$$x = -3 \quad y_{\max} = \frac{(-3)^2 - 2(-3) + 1}{-3 + 1} = -8 \quad \max(-3, -8)$$

$$x = 1 \quad y_{\min} = \frac{1^2 - 2 \cdot 1 + 1}{1 + 1} = 0 \quad \min(1, 0)$$

$(-\infty, -3], [1, +\infty)$  η  $f$  είναι αύξουσα

$[-3, 1]$  η  $f$  είναι φθίνουσα

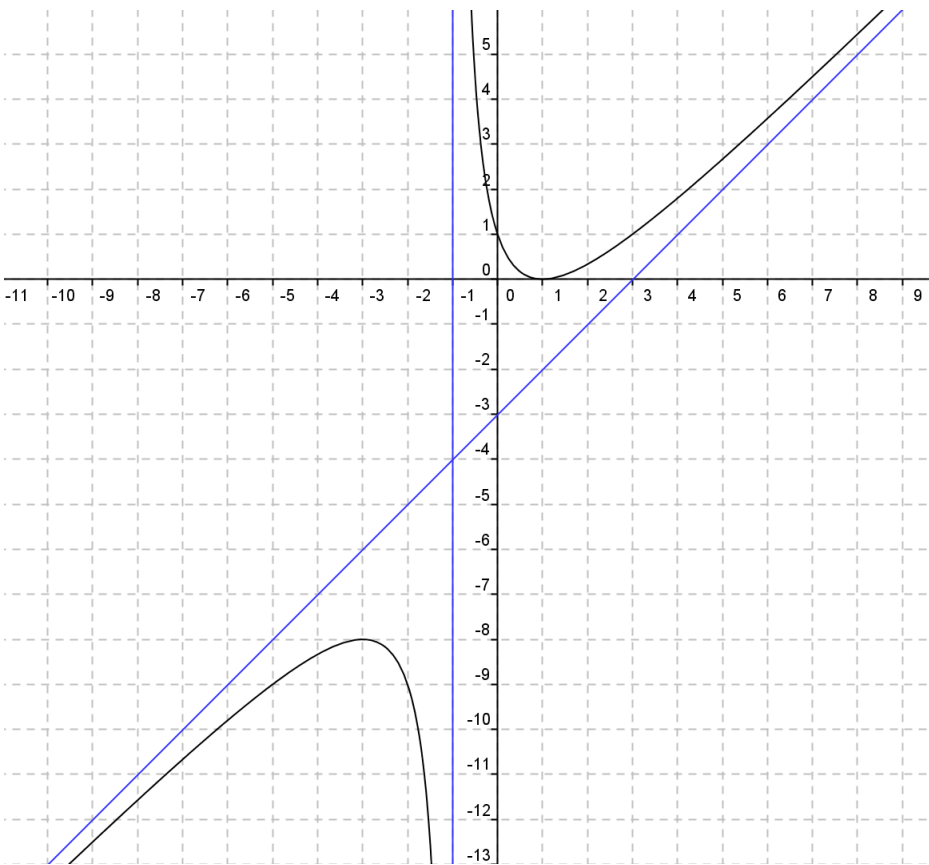
(δ) Ασύμπτωτες

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1} = \frac{4}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1} = \frac{4}{0^-} = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow x = -1 \text{ Κ.Α.}$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 2x + 1 & x + 1 \\ -x^2 - x & x - 3 \\ \hline -3x + 1 & \\ +3x + 3 & \\ \hline +4 & \end{array} \quad y = x - 3 \text{ Π.Α.}$$

$$x = 0 \quad y = -3 \quad (0, -3)$$

$$y = 0 \quad x = 3 \quad (3, 0)$$



2. Ο πιο κάτω πίνακας, παρουσιάζει τον αριθμό των ταξιδιών που πραγματοποίησαν στο εξωτερικό, τα 20 μέλη μιας επιτροπής της Βουλής των Αντιπροσώπων της Κύπρου κατά τη διάρκεια του 2011.

Αριθμός ταξιδιών ( $x_i$ )	0	1	2	3	4	5
Αριθμός βουλευτών ( $f_i$ )	1	3	4	3	5	4

Να βρείτε:

- (α) Την επικρατούσα τιμή ( $x_e$ ) των παρατηρήσεων.  
 (β) Τη μέση τιμή ( $\bar{x}$ ) των παρατηρήσεων.  
 (γ) Την τυπική απόκλιση ( $\sigma$ ) των παρατηρήσεων

### ΛΥΣΗ

$x_i$	$f_i$	$x_i \cdot f_i$	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
0	1	0	-3	9	9
1	3	3	-2	4	12
2	4	8	-1	1	4
3	3	9	0	0	0
4	5	20	1	1	5
5	4	20	2	4	16
	20	60			46

(α) Η επικρατούσα τιμή είναι:  $x_e = 4$

(β) Η μέση τιμή είναι:

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} = \frac{60}{20} = 3$$

(γ) Η τυπική απόκλιση είναι:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i(x_i - \bar{x})^2}{v}} = \sqrt{\frac{46}{20}} = \sqrt{2,3} \approx 1,52$$

3. Από μια ομάδα 4 ανδρών και 5 γυναικών πρόκειται να σχηματιστεί μια τριμελής επιτροπή, η οποία θα λάβει μέρος σε ένα συνέδριο.
- (α) Να βρείτε πόσες διαφορετικές επιτροπές μπορούν να σχηματιστούν, αν δεν υπάρχει κανένας περιορισμός
- (β) Αν επιλεγεί τυχαία μια επιτροπή, να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:  
A: η επιτροπή να αποτελείται μόνο από γυναίκες.  
B: η επιτροπή να αποτελείται από 2 τουλάχιστον άνδρες.

**ΛΥΣΗ**

$$(α) \binom{9}{3} = 84$$

$$(β) (i) N(\Omega) = \binom{9}{3} = 84$$

$$N(A) = \binom{5}{3} = 10$$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{10}{84} = \frac{5}{42}$$

$$(ii) N(B) = \binom{4}{2} \cdot \binom{5}{1} + \binom{4}{3} \cdot \binom{5}{0} = 6 \cdot 5 + 4 = 34$$

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{34}{84} = \frac{17}{42}$$



4. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση  $u = x + 1$  ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $\int_0^1 x(x + 1)^3 dx$

**ΛΥΣΗ**

$$u = x + 1 \Rightarrow x = u - 1$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow u = 2$$

$$\Rightarrow du = dx$$

$$\int_0^1 x(x + 1)^3 dx = \int_1^2 (u - 1)u^3 du$$

$$= \int_1^2 (u^4 - u^3) du$$

$$= \left[ \frac{u^5}{5} - \frac{u^4}{4} \right]_1^2$$

$$= \left( \frac{2^5}{5} - \frac{2^4}{4} \right) - \left( \frac{1^5}{5} - \frac{1^4}{4} \right)$$

$$= \frac{31}{5} - \frac{15}{4} = \frac{49}{20}$$

5. Δίνεται η συνάρτηση  $y = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 1$  με  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(α) Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$ , αν η συνάρτηση έχει σημείο καμπής για  $x = 1$  και τοπικό ακρότατο για  $x = 3$ .

(β) Αν  $\alpha = -3$  και  $\beta = -9$ , να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της με τετμημένη  $x = 0$ .

**ΛΥΣΗ**

(α)  $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2\alpha x + \beta$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x + 2\alpha$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=1} = 0 \Rightarrow 6 \cdot 1 + 2\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = -3$$

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=3} = 0 \Rightarrow 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot (-3) \cdot 3 + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -9$$

(β)  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

Για  $x=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow A(0,1)$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 9$$

$$\lambda_{\text{εφ}} = \frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = -9$$

Εξ. Εφαπτομένης στο  $A(0,1)$   $y - 1 = -9(x - 0) \Rightarrow y = 1 - 9x$

