

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ  
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ  
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2011

Μάθημα : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
4-ΩΡΟ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Δευτέρα 6 Ιουνίου 2011  
10:30 – 13:30

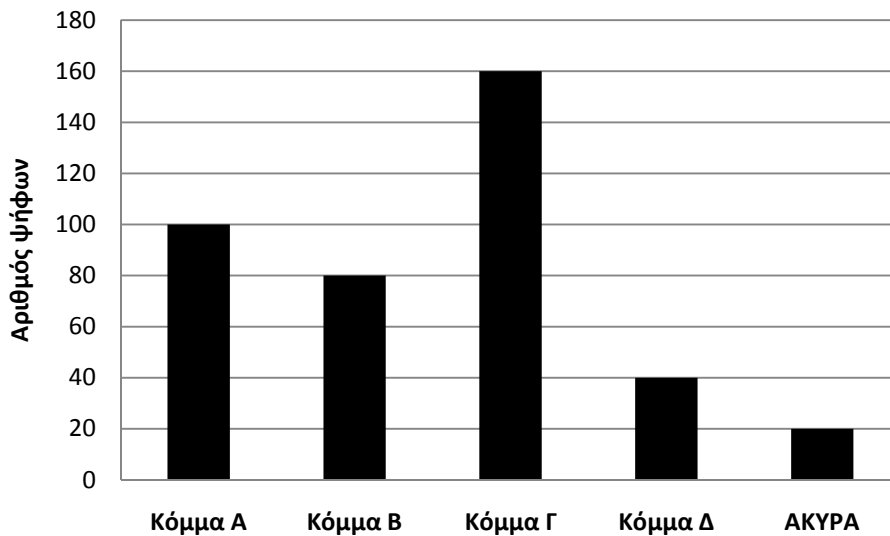
ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄:

1.	<p>Ένας μαθητής πήρε το Α΄ τετράμηνο στα μαθήματα ειδικότητας, τους πιο κάτω βαθμούς : 14, 17, 19, 12, 16, 18. Να βρείτε τη μέση τιμή των βαθμών του.</p> <p><b>ΛΥΣΗ</b></p> $\bar{x} = \frac{14 + 17 + 19 + 12 + 16 + 18}{6} = \frac{96}{6} = 16$	
2.	<p>Δίνεται κύβος με ακμή 7cm. Να βρείτε: (α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του, και (β) τον όγκο του.</p> <p><b>ΛΥΣΗ</b></p> <p>(α) <math>E_{ολ} = 6\alpha^2 = 6 \cdot 7^2 = 294 \text{ cm}^2</math></p> <p>(β) <math>V = \alpha^3 = 7^3 = 343 \text{ cm}^3</math></p>	
3.	<p>Ένας έμπορος πούλησε ένα αυτοκίνητο αξίας €8500 με κέρδος 20%. Να βρείτε τη τιμή πώλησης του αυτοκινήτου.</p> <p><b>ΛΥΣΗ</b></p> $8500 \cdot \frac{20}{100} = \text{€}1700 \text{ κέρδος}$ $8500 + 1700 = \text{€}10200 \text{ τιμή πώλησης}$ <p>ή</p> $8500 \cdot \frac{120}{100} = \text{€}10200 \text{ τιμή πώλησης}$	

4.	<p>Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο <math>K(0, 2)</math> και ακτίνα <math>R=4</math>.</p> <p><b>ΛΥΣΗ</b></p> $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$ $(x - 0)^2 + (y - 2)^2 = 4^2$ $x^2 + (y - 2)^2 = 16$	
5.	<p>Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης "<b>ΔΡΟΜΟΣ</b>".</p> <p><b>ΛΥΣΗ</b></p> <p><b>Ο Ο Δ Ρ Μ Σ</b></p> $M_6^e = \frac{6!}{2!} = 360$	
6.	<p>Ρίχνουμε ένα ζάρι μια φορά. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων :</p> <p>A: «Η ένδειξη να είναι περιττός αριθμός».</p> <p>B: «Η ένδειξη να είναι αριθμός μεγαλύτερος του 4».</p> <p><b>ΛΥΣΗ</b></p> $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $A = \{1, 3, 5\}$ $B = \{5, 6\}$ $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	

7. Το πιο κάτω ραβδόγραμμα παρουσιάζει τα αποτελέσματα των βουλευτικών εκλογών του 2011 σε μια ορεινή κοινότητα της Κύπρου.



Αν ψήφισαν όλοι οι εγγεγραμμένοι ψηφοφόροι της κοινότητας, να βρείτε:

- (α) τον αριθμό των εγγεγραμμένων ψηφοφόρων,  
 (β) το κόμμα που πήρε τους περισσότερους ψήφους, και  
 (γ) το ποσοστό (%) των άκυρων ψηφοδελτίων.

**ΛΥΣΗ**

(α)  $100+80+160+40+20=400$

(β) Το κόμμα Γ

(γ) Το ποσοστό των άκυρων ψηφοδελτίων είναι:  $\frac{20}{400} \cdot 100\% = 5\%$

8. Να βρείτε τη γενική λύση της τριγωνομετρικής εξίσωσης :  $\varepsilon\varphi(x + 20^\circ) = 1$ .

**ΛΥΣΗ**

$\varepsilon\varphi(x+20^\circ) = 1$

$\varepsilon\varphi(x+20^\circ) = \varepsilon\varphi 45^\circ$

$x+20^\circ = 180^\circ\kappa + 45^\circ, \kappa \in \mathbb{Z}$

Γενική λύση:  $x = 180^\circ\kappa + 25^\circ, \kappa \in \mathbb{Z}$

9.

Να λύσετε το σύστημα :

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y = 14 \end{cases}$$
**ΛΥΣΗ**

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y = 14 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = 2 - x \\ x^2 + y = 14 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = 2 - x \\ x^2 + (2 - x) = 14 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x^2 + 2 - x - 14 = 0$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$(x - 4)(x + 3) = 0$$

$$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow y = -2 \quad (x, y) = (4, -2)$$

$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow y = 5 \quad (x, y) = (-3, 5)$$

10

Δίνεται κανονική τετραγωνική πυραμίδα με όγκο  $V = 400 \text{ cm}^3$  και ύψος  $u = 12 \text{ cm}$ . Να βρείτε:

- (α) το μήκος της ακμής της βάσης της πυραμίδας,  
 (β) το παράπλευρο ύψος ( $h$ ) της πυραμίδας, και  
 (γ) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.

**ΛΥΣΗ**

$$(α) \quad V = \frac{E_{\beta} \cdot u}{3}$$

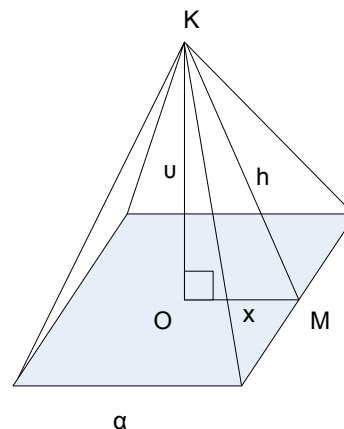
$$400 = \frac{E_{\beta} \cdot 12}{3}$$

$$4 \cdot E_{\beta} = 400$$

$$E_{\beta} = 100 \text{ cm}^2$$

$$a^2 = 100$$

$$a = 10 \text{ cm}$$



$$\begin{aligned}(\beta) \quad OM &= 10 : 2 = 5 \text{ cm} \\ h^2 &= u^2 + (OM)^2 \\ h^2 &= 12^2 + 5^2 \\ h^2 &= 144 + 25 \\ h^2 &= 169 \Rightarrow h = 13 \text{ cm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\gamma) \quad E_{\pi} &= \frac{\Pi_{\beta} \cdot h}{2} \\ E_{\pi} &= \frac{4\alpha \cdot 13}{2} \\ E_{\pi} &= \frac{40 \cdot 13}{2} \\ E_{\pi} &= 260 \text{ cm}^2 \\ E_{\text{ολ}} &= E_{\pi} + E_{\beta} \\ E_{\text{ολ}} &= 260 + 100 = 360 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

### ΜΕΡΟΣ Β΄:

1. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό των λογοτεχνικών βιβλίων που έχουν διαβάσει οι μαθητές ενός τμήματος κατά τη διάρκεια της περσινής σχολικής χρονιάς στο μάθημα των Νέων Ελληνικών.

Αριθμός βιβλίων ( $x_i$ )	1	2	3	4
Αριθμός μαθητών ( $f_i$ )	12	9	6	3

Να βρείτε:

- (α) τον αριθμό των μαθητών του τμήματος,  
 (β) την επικρατούσα τιμή ( $x_{\epsilon}$ ) των παρατηρήσεων,  
 (γ) τη μέση τιμή ( $\bar{x}$ ) των παρατηρήσεων, και  
 (δ) την τυπική απόκλιση ( $\sigma$ ) των παρατηρήσεων.

#### ΛΥΣΗ

(α)  $12 + 9 + 6 + 3 = 30$  μαθητές

(β)  $x_{\epsilon} = 1$

$x_i$	$f_i$	$x_i \cdot f_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i (x_i - \bar{x})^2$
1	12	12	-1	1	12
2	9	18	0	0	0
3	6	18	1	1	6
4	3	12	2	4	12
	30	60			30

$$(γ) \bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{60}{30} = 2$$

$$(δ) \sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{v}} = \sqrt{\frac{30}{30}} = 1$$

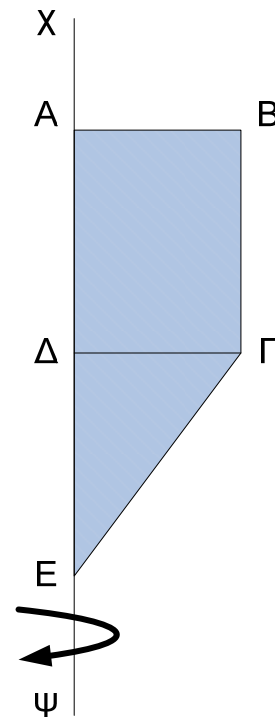
2.

Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και το ΔΓΕ ορθογώνιο τρίγωνο ( $\hat{\Delta} = 90^\circ$ ). Δίνονται  $AB = 6 \text{ cm}$ ,  $BΓ = 8 \text{ cm}$  και  $ΓΕ = 10 \text{ cm}$ .

Το σχήμα ΑΒΓΕ κάνει πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα χψ.

Να βρείτε:

- (α) τον όγκο του στερεού που παράγεται, και  
 (β) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται.



### ΛΥΣΗ

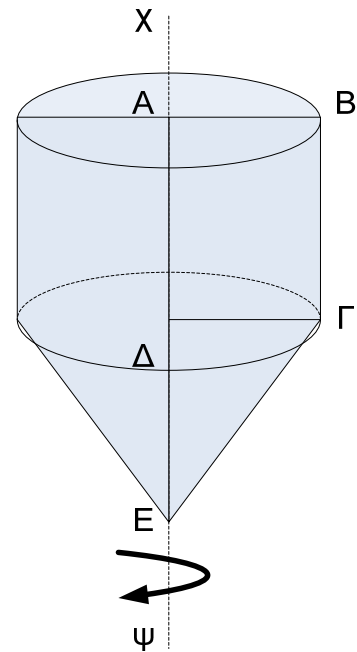
$$(\Delta E)^2 = (\Gamma E)^2 - (\Gamma \Delta)^2$$

$$(\Delta E)^2 = 10^2 - 6^2$$

$$(\Delta E)^2 = 100 - 36$$

$$(\Delta E)^2 = 64$$

$$\Delta E = 8 \text{ cm}$$



#### Στοιχεία κυλίνδρου

$$R = 6 \text{ cm}$$

$$u = 8 \text{ cm}$$

#### Στοιχεία κώνου

$$R = 6 \text{ cm}$$

$$\lambda = 10 \text{ cm}$$

$$u = 8 \text{ cm}$$

$$(\alpha) \quad V_{\text{ολ}} = V_{\text{κυλίνδρου}} + V_{\text{κώνου}}$$

$$V_{\text{ολ}} = \pi R^2 \cdot u_{\text{κυλ.}} + \frac{\pi R^2 \cdot u_{\text{κών.}}}{3}$$

$$= \pi 6^2 \cdot 8 + \frac{\pi 6^2 \cdot 8}{3}$$

$$= 288\pi + 96\pi$$

$$V_{\text{ολ}} = 384\pi \text{ cm}^3$$

$$(\beta) \quad E_{\text{ολ}} = E_{\text{AB}} + E_{\text{BΓ}} + E_{\text{ΓE}}$$

$$E_{\text{ολ}} = E_{\text{βάσης κυλίνδρου}} + E_{\text{κυρτής κυλίνδρου}} + E_{\text{κυρτής κώνου}}$$

$$E_{\text{ολ}} = \pi R^2 + 2\pi R u + \pi R \lambda$$

$$= \pi \cdot 6^2 + 2\pi \cdot 6 \cdot 8 + \pi \cdot 6 \cdot 10$$

$$= 36\pi + 96\pi + 60\pi$$

$$= 192\pi \text{ cm}^2$$

3. Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου  $\Omega$  με  $P(A) = \frac{3}{10}$ ,

$$P(B) = \frac{2}{5} \text{ και } P(A \cap B) = \frac{1}{10}.$$

(i) Να βρείτε τις πιθανότητες:

(α)  $P(A')$

(β)  $P(A \cup B)$

(γ)  $P(A - B)$

(ii) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα.

**ΛΥΣΗ**

(i) (α)  $P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$

(β)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{10} + \frac{2}{5} - \frac{1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

(γ)  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{10} - \frac{1}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{(ii) } P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{25} \\ P(A \cap B) = \frac{1}{10} \end{array} \right\} \begin{array}{l} P(A) \cdot P(B) \neq P(A \cap B) \\ \text{Άρα A, B δεν είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα} \end{array}$$

4. (α) Να βρείτε το ολοκλήρωμα :  $\int (x^5 - 2x) dx$ .

(β) Αν  $y = 2x + \eta \mu x$  να δείξετε ότι :  $\frac{d^2y}{dx^2} + y - 2x = 0$ .

**ΛΥΣΗ**

(α)  $\int (x^5 - 2x) dx = \frac{x^6}{6} - x^2 + c$

(β)  $y = 2x + \eta \mu x$

$$\frac{dy}{dx} = 2 + \sigma \upsilon \nu x$$



$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\eta\mu x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y - 2x = -\eta\mu x + 2x + \eta\mu x - 2x = 0$$

5. Πισίνα, σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με μήκος 12m, πλάτος 6m και ύψος 2m, θα επενδυθεί με μονωτικό υλικό.

Η εταιρεία που ανέλαβε να επενδύσει με μονωτικό υλικό τα τοιχώματα και τον πυθμένα της πισίνας, χρεώνει για την αγορά του μονωτικού υλικού €15 το τετραγωνικό μέτρο και για την τοποθέτηση του €12 το τετραγωνικό μέτρο.

(α) Να βρείτε πόσα τετραγωνικά μέτρα μονωτικού υλικού θα χρειαστούν.

(β) Αν η εταιρεία θέλει να κερδίσει 25% πάνω στη συνολική τιμή χρέωσης της μόνωσης (αγορά και τοποθέτηση), να βρείτε πόσο θα στοιχίσει η μόνωση της πισίνας.

### ΛΥΣΗ

$$(α) E_{ολ} = E_{πυθμένα} + E_{τοιχωμάτων}$$

$$E_{ολ} = 12 \cdot 6 + 2 \cdot 12 \cdot 2 + 2 \cdot 6 \cdot 2$$

$$E_{ολ} = 72 + 48 + 24$$

$$E_{ολ} = 144m^2$$

Θα χρειαστούν  $144m^2$  μονωτικό υλικό.

$$(β) \text{Κόστος μόνωσης} = (15 + 12) \cdot 144$$

$$= 27 \cdot 144$$

$$= €3888$$

Συνολική χρέωση

$$3888 \cdot \frac{25}{100} = 972 \text{ κέρδος}$$

$$3888 + 972 = €4860$$

ή

$$3888 \cdot \frac{125}{100} = €4860$$

Η μόνωση της πισίνας θα στοιχίσει €4860.