ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2010

Μάθημα : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
4-ΩΡΟ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ
Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Σάββατο, 29 Μαΐου 2010
11:00 – 14:00

ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄

1.	Να βρείτε τη μέση τιμή των αριθμών : 14, 16, 30, 23, 17 **<u>ΛΥΣΗ</u>** $\overline{X} = \dfrac{14+16+17+23+30}{5}$ $\overline{X} = \dfrac{100}{5}$ $\overline{X} = 20$	
2.	Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης **ΘΑΡΡΟΣ** **<u>ΛΥΣΗ</u>** $M_6^{\varepsilon} = \dfrac{6!}{2!}$ $M_6^{\varepsilon} = \dfrac{720}{2}$ $M_6^{\varepsilon} = 360$	
3.	Πόσα θα πληρώσει κάποιος για να αγοράσει ένα κινητό αξίας€220, αν ο καταστηματάρχης του κάνει έκπτωση15%; **<u>ΛΥΣΗ</u>** $220 \cdot \dfrac{15}{100}$ = €33 έκπτωση 220 - 33 = €187 Β’ τρόπος 100% - 15% = 85% $220 \cdot \dfrac{85}{100}$ = €187	

4.	Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ της συνάρτησης $y=x^2+2x-4$. **<u>ΛΥΣΗ</u>** $\frac{dy}{dx}=2x+2$	
5.	Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο Κ(2, 0) και ακτίνα R=6. **<u>ΛΥΣΗ</u>** $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$ $(x-2)^2+(y-0)^2=6^2$ $(x-2)^2+y^2=36$ $x^2+y^2-4x-32=0$	
6.	Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int (x^4+4)dx$ **<u>ΛΥΣΗ</u>** $\int (x^4+4)dx=\frac{x^5}{5}+4x+c$	
7.	Να λύσετε το σύστημα: $\left.\begin{array}{l} x+y=7 \\ x.y=12 \end{array}\right\} \Rightarrow$ **<u>ΛΥΣΗ</u>** $\left.\begin{array}{l} y=7-x \\ x.y=12 \end{array}\right\} \Rightarrow$ $x\cdot(7-x)=12$ $7x-x^2=12$ $x^2-7x+12=0$ $(x-4)(x-3)=0$ $x-4=0 \Rightarrow x=4$ ή $x-3=0 \Rightarrow x=3$ Αν $x=3 \Rightarrow y=7-3 \Rightarrow y=4$ $x=3,\ y=4$ Αν $x=4 \Rightarrow y=7-4 \Rightarrow y=3$ $x=4,\ y=3$ <u>Απάντηση</u>: $x=3,\ y=4$ ή $x=4,\ y=3$	

8. Να βρείτε τις γενικές λύσεις της τριγωνομετρικής εξίσωσης

$2\,συν^2x - 3\,συνx + 1 = 0$

<u>ΛΥΣΗ</u>

Θέτω $συνx = ω$

$2ω^2 - 3ω + 1 = 0$

$(2ω - 1)(ω - 1) = 0$

$2ω - 1 = 0$ ή $ω - 1 = 0$

$ω = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $ω = 1$

$συνx = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $συνx = 1$

$συνx = συν60^o$ $\qquad$ $συνx = συν0^o$

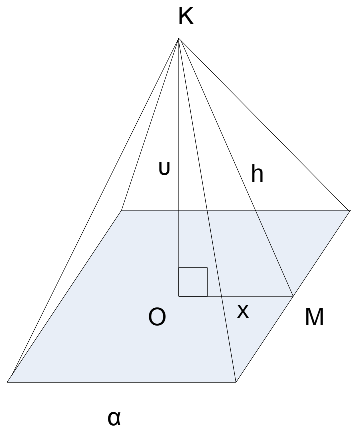
$x = 360^o κ + 60^o$ $\qquad$ $x = 360^o κ - 60^o$ $\qquad$ $x = 360^o κ$

9. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει περίμετρο βάσης $Π_β = 48\text{cm}$ και ύψος $υ = 8\text{cm}$. Να βρείτε:

(α) Το παράπλευρο ύψος (h) της πυραμίδας.

(β) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.

(γ) Τον όγκο της πυραμίδας



<u>Λύση</u>

(α)

$Π_β = 48\text{cm}$

$4α = 48$

$α = 12\text{ cm}$

$x = 12 \div 2$

$x = 6\text{cm}$

Π.Θ.

$h^2 = υ^2 + x^2$

$h^2 = 8^2 + 6^2$

$h^2 = 100$

$h = 10\text{cm}$

(β) $E_β = 12^2 = 144\text{cm}^2$

$$E_{ολ} = \frac{Π_β \cdot h}{2} + E_β$$

$$E_{ολ} = \frac{48 \cdot 10}{2} + 144 = 384\text{cm}^2$$

(γ) $V = \frac{E_β \cdot υ}{3}$

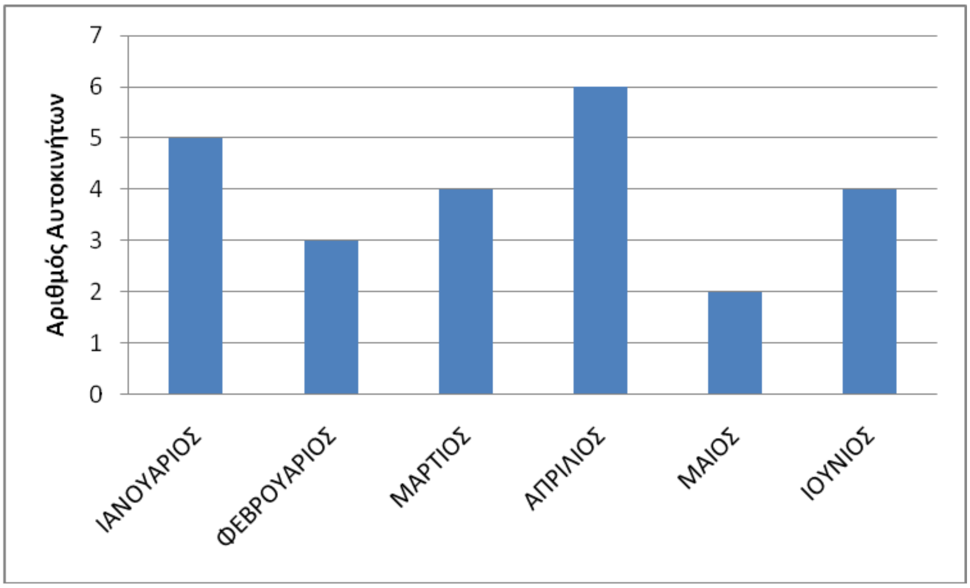
$$V = \frac{144 \cdot 8}{3}$$

$V = 384\text{cm}^3$

10.	Τα Α και Β είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{3}$ και $P(A\cup B)=\frac{11}{15}$. Να βρείτε τις πιθανότητες: (α) $P(B')$ (β) $P(A\cap B)$ **<u>Λύση</u>** (α) $P(B')=1-P(B)$ $P(B')=1-\frac{1}{3}$ $P(B')=\frac{2}{3}$ β) $P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$ $P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{11}{15}$ $P(A\cap B)=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$	

ΜΕΡΟΣ Β΄

1. Στο πιο κάτω ραβδόγραμμα συχνοτήτων φαίνεται ο αριθμός των αυτοκινήτων που πωλήθηκαν σε κάθε μήνα κατά τους πρώτους έξι μήνες της περσινής χρονιάς από μια εταιρεία.



Να βρείτε:

(α) Ποιο μήνα πωλήθηκαν τα περισσότερα αυτοκίνητα.

(β) Πόσα αυτοκίνητα πωλήθηκαν συνολικά στη διάρκεια των έξι μηνών.

(γ) Ποιο είναι το ποσοστό των πωλήσεων που έγιναν το Φεβρουάριο.

(δ) Ποια είναι η μέση τιμή των πωλήσεων στους πρώτους έξι μήνες.

<u>ΛΥΣΗ</u>

(α) Τον Απρίλιο

(β) 24 αυτοκίνητα

(γ) $\frac{3}{24}\cdot 100\% = 12{,}5\%$

(δ) $\bar{x} = \frac{5+3+4+6+2+4}{6}$

$\bar{x} = \frac{24}{6} = 4$

2.	Βιοτεχνία που κατασκευάζει κεριά χρησιμοποιεί ως πρώτη ύλη ράβδους από κερί σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις 60cm, 16cm και 10cm. Αν χρησιμοποιήσει 10 ράβδους από κερί για να κατασκευάσει διακοσμητικά κεριά σχήματος κύβου με ακμή 2cm, πόσα διακοσμητικά κεριά θα κατασκευάσει; (Κατά την κατασκευή δεν υπάρχει απώλεια πρώτης ύλης.) **<u>ΛΥΣΗ</u>** Ορθογ. Παραλληλεπίπεδο $V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ $V = 60 \cdot 16 \cdot 10$ $V = 9600\,\text{cm}^3$ Συνολική πρώτη ύλη 10 ράβδοι Χ 9600 = 96000cm^3 Κύβος $V= \alpha^3$ $V= 2^3$ $V= 8\ \text{cm}^3$ $96000 \div 8 = 12000$ κεριά	
3.	Σε μια τάξη υπάρχουν 6 αγόρια και 4 κορίτσια. Παίρνουμε στην τύχη τρία από τα παιδιά αυτά. Να βρείτε: (α) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή των τριών παιδιών. (β) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή των τριών παιδιών, αν θα επιλέξουμε δύο αγόρια και ένα κορίτσι. (γ) Την πιθανότητα τουλάχιστον ένα από τα τρία παιδιά που θα επιλέξουμε να είναι αγόρι. **<u>ΛΥΣΗ</u>** (α) $\binom{10}{3} = 120$ (β) $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{1} = 15 \cdot 4 = 60$ (γ) Γ: Τουλαχιστον ένα παιδί να είναι αγόρι $P(\Gamma) = \dfrac{\binom{6}{1}\cdot\binom{4}{2}+\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{1}+\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \dfrac{6\cdot 6+15\cdot 4+20}{120} = \dfrac{116}{120} = \dfrac{29}{30}$ (γ) Β΄τρόπος Τουλάχιστον 1 αγόρι ➔ Όλες οι περιπτώσεις εκτός από την περίπτωση να επιλεγούν μόνο κορίτσια $1 - \dfrac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = 1 - \dfrac{4}{120} = \dfrac{29}{30}$	

4. Στον πιο κάτω πίνακα φαίνεται ο χρόνος σε λεπτά που χρειάζονται 60 μαθητές για να μεταβούν από το σπίτι τους στο σχολείο.

Χρόνος σε λεπτά (x_i)	5	10	20	30	35	50	55
Αριθμός μαθητών (f_i)	3	5	9	12	14	10	7

Να βρείτε:

(α) Την επικρατούσα τιμή (x_ε).

(β) Τη μέση τιμή ($\bar{x}$).

(γ) Την τυπική απόκλιση (σ).

<u>ΛΥΣΗ</u>

x_i	f_i	$x_i\ f_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
5	3	15	-28	784	2352
10	5	50	-23	529	2645
20	9	180	-13	169	1521
30	12	360	-3	9	108
35	14	490	2	4	56
50	10	500	17	289	2890
55	7	385	22	484	3388
	60	1980			12960

(α) Η επικρατούσα τιμή είναι: $x_\varepsilon = 35$

(β) Η μέση τιμή είναι: $\bar{x} = \dfrac{1980}{60} = 33$

(γ) Η τυπική απόκλιση είναι:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\kappa} f_i (x_i - \bar{x})^2}{\nu}} = \sqrt{\frac{12960}{60}} = \sqrt{216} = 14,697$$

5.	Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο και το ΔΓΕ είναι ορθογώνιο τρίγωνο ($\hat{Γ} = 90^\circ$). Το σχήμα ΑΒΕΔ κάνει πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα xy. Αν $AB = 5$cm και $ΓΕ = 12$cm, να βρείτε: (α) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται. (β) Τον όγκο του στερεού που παράγεται.	

ΛΥΣΗ

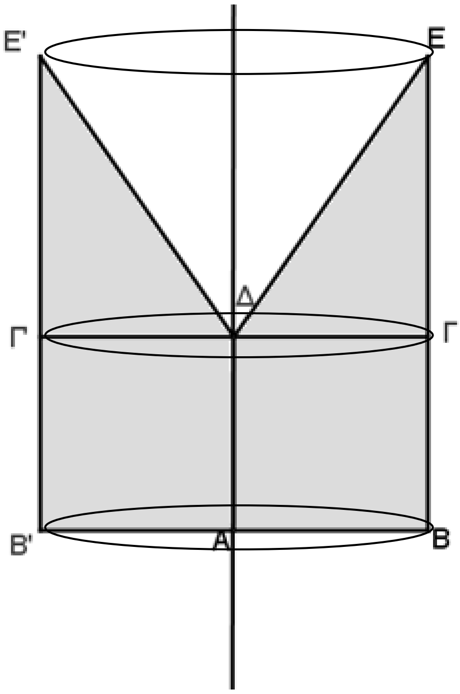
$(ΕΔ)^2=(ΔΓ)^2+(ΕΓ)^2$

$(ΕΔ)^2= 5^2 + 12^2$

$(ΕΔ)^2= 25 + 144$

$(ΕΔ)^2= 169$

(ΕΔ)= 13 cm



<u>Στοιχεία κυλίνδρου</u>

R = 5 cm

$υ_1$ = 17 cm

<u>Στοιχεία κώνου</u>

R = 5 cm

λ = 13 cm (Π.Θ)

$υ_2$ = 12 cm

Εολ = Εκ.κυλίνδρου + Εκ.κώνου + Εκύκλου

$Εολ = 2πRυ_1 + πRλ + πR^2$

$= 2π\, 5·17 + π\, 5·13 + π\, 5^2$

$= 170π + 65π + 25π$

$= 260π$ cm^2

Vολ = Vκυλίνδρου – Vκώνου

$= π R^2 υ_1 - \dfrac{πR^2υ_2}{3}$

$= π\, 5^2 ·17 - \dfrac{π5^2 ·12}{3}$

$= 425π - 100π$

$= 325π$ cm^3