ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2008

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Σάββατο, 31 Μαΐου 2008
7:30 π.μ. – 10:30 π.μ.

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΡΕΙΣ (3) ΣΕΛΙΔΕΣ

Στο τέλος του δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο που αποτελείται από δύο (2) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Αποτελείται από 10 ασκήσεις.
Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_1^2 (2x+1)dx$

2. Αν η εστία της παραβολής $y^2=4\alpha x$ είναι το σημείο Ε(3,0), να βρείτε την εξίσωση της διευθετούσας της.

3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x}{x+\eta\mu x}$

4. Δίνονται οι πίνακες $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$.

   Να βρείτε τους πίνακες: (α) $\Gamma = A\cdot B$
   (β) $\Delta = \Gamma$

5. Αν το σημείο Α(1,2) είναι σημείο καμπής της συνάρτησης $y=\alpha x^3+6x^2-\beta x+5$, να υπολογίσετε τις τιμές των α και β.

6. Σε μια διεθνή σύσκεψη συμμετέχουν 2 Έλληνες, 4 Γάλλοι και 5 Γερμανοί. Να βρείτε με πόσους τρόπους μπορούν να καθήσουν σε ευθεία γραμμή, έτσι ώστε όλα τα μέλη της ίδιας εθνικότητας να κάθονται σε συνεχόμενες θέσεις.

7. Δίνεται η καμπύλη κ με εξίσωση $y=\ln x$. Το χωρίο που περικλείεται από την πιο πάνω καμπύλη κ, την ευθεία $y=1$ και τους άξονες Οx και Οy, περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των y. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται.

8. Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ στο σημείο της $T(x_1,y_1)$ είναι η $\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1$.

9. (α) Να δώσετε τον ορισμό ώστε δύο ενδεχόμενα Α και Β του ίδιου δειγματικού χώρου Ω, να είναι ανεξάρτητα.
   (β) Αν τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω είναι ανεξάρτητα, να αποδείξετε ότι και τα ενδεχόμενα Α και Β΄ είναι ανεξάρτητα.

10. Δίνεται η συνάρτηση f με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, για την οποία ισχύει $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$ και

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(x)+f''(x)]\sigma\upsilon\nu x\,dx=2.$$

Να υπολογίσετε το $f'(0)$.

ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από 5 ασκήσεις.
Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση $y=\frac{x^2-x+4}{x-1}$. Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής της με τους άξονες, τα τοπικά ακρότατά της και τις ασύμπτωτές της, να την παραστήσετε γραφικά.

2. Ένα δοχείο Α περιέχει 6 κόκκινες και 4 πράσινες σφαίρες, ενώ ένα δεύτερο δοχείο Β περιέχει 7 κόκκινες και 3 πράσινες σφαίρες. Μια σφαίρα επιλέγεται στην τύχη από το δοχείο Α και τοποθετείται στο δοχείο Β. Στη συνέχεια μια σφαίρα επιλέγεται στην τύχη από το δοχείο Β και τοποθετείται στο δοχείο Α. Μετά το τέλος του πειράματος να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

   (α) Να επιλεγεί κόκκινη σφαίρα από το δοχείο Α και κόκκινη σφαίρα από το δοχείο Β.

   (β) Να μην αλλάξει η σύνθεση των δύο δοχείων, δηλαδή το δοχείο Α να περιέχει 6 κόκκινες και 4 πράσινες σφαίρες και το δοχείο Β να περιέχει 7 κόκκινες και 3 πράσινες σφαίρες.

3. Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $(x-\alpha)^2+y^2=R^2$ και το σημείο του Τ(α+Rσυνθ,Rημθ). Η εφαπτομένη του κύκλου στο Τ τέμνει τον άξονα των x στο Α και τον άξονα των y στο Β.

   (α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο Τ είναι:
   $$x\sigma\upsilon\nu\theta+y\eta\mu\theta=\alpha\sigma\upsilon\nu\theta+R.$$

   (β) Να δείξετε ότι η εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου Μ του ΑΒ είναι:
   $$y^2(2x-\alpha)^2=R^2(x^2+y^2).$$

4. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι συνεχείς στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, με f(-x)=f(x) και g(x)+g(-x)=1, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

   (α) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση u = -x, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι: $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)g(x)dx = \int_{0}^{\alpha} f(x)dx, \quad \alpha > 0$.

   (β) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του (α), ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^{2x}+1}dx$.

5. Από όλα τα ορθογώνια τρίγωνα με σταθερή περίμετρο c (c>0), να βρείτε τις γωνίες εκείνου του ορθογωνίου τριγώνου, του οποίου το μήκος της υποτείνουσας είναι ελάχιστο.

ΤΕΛΟΣ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ