

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ  
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΤΕΤΑΡΤΗ 5 ΙΟΥΝΙΟΥ 2002  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ  
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ(4)**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$ , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f+g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

*Μονάδες 9*

**B.** Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη  $\Sigma$ , αν η πρόταση είναι σωστή, ή  $\Lambda$ , αν αυτή είναι λανθασμένη.

**1.** Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$ , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

*Μονάδες 2*

**2.** Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σ' ένα σημείο  $x_0$ , τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

*Μονάδες 2*

**3.** Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και ισχύει  $f'(x) = 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta$ .

*Μονάδες 2*

4. Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και ισχύει  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ .

Μονάδες 2

5. Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  στο  $x_0$ , τότε ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

Μονάδες 2

6. Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  στο  $x_0$ , τότε ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

Μονάδες 2

7. Για κάθε μιγαδικό αριθμό  $z = \alpha + \beta i$  ισχύει :

$$|z| = \alpha^2 + \beta^2$$

Μονάδες 2

8. Για το μιγαδικό αριθμό  $i$  ισχύει :  $i^4 = 1$  .

Μονάδες 2

### ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1 = -1+i$ ,  $z_2 = 3-4i$

- α. Να υπολογίσετε το μιγαδικό αριθμό  $z_1 + 5z_2$

Μονάδες 6

- β. Να υπολογίσετε το μιγαδικό αριθμό  $\frac{z_2}{z_1}$

Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι το πρωτεύον όρισμα του μιγαδικού αριθμού  $z_1$  είναι:  $\text{Arg}(z_1) = \frac{3\pi}{4}$

*Μονάδες 6*

δ. Να υπολογίσετε το μιγαδικό αριθμό  $z_1^8$  .

*Μονάδες 7*

### **ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$  .

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

*Μονάδες 10*

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(-1, f(-1))$  .

*Μονάδες 5*

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα  $(0, 1)$  .

*Μονάδες 10*

### **ΘΕΜΑ 4ο**

Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 4x}{x - 2} & , \text{ αν } x < 2 \\ -x^2 + k & , \text{ αν } x \geq 2 \end{cases}$

όπου  $k \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε :

α. το  $k$ , ώστε η συνάρτηση  $f$  να είναι συνεχής στο  $x_0 = 2$  ,

*Μονάδες 7*

β. το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  ,

*Μονάδες 5*

γ. το ρυθμό μεταβολής της  $f$  στο  $x_0 = 4$  και

*Μονάδες 5*

δ. την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g(x) = \frac{f(x)}{x+3}$  στο  $-\infty$ .

*Μονάδες 8*