Φροντιστήριο Μ.Ε. Συνειρμός

Μαθηματικά Γ′ ΕΠΑΛ - Πανελλαδικές εξετάσεις 2023

Απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α:

$\mathbf{A_1}$: Έστω $F(x) = c \cdot f(x)$, $c \in \mathbb{R}$. Τότε:

- $F(x+h) = c \cdot f(x+h)$
- $F(x) = c \cdot f(x)$

Επομένως έχουμε,

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} =$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} =$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{c \cdot (f(x+h)-f(x))}{h} =$

$c \cdot \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$

$c \cdot f'(x)$.

Άρα, $F'(x) = c \cdot f'(x)$.

$\mathbf{A_2}$: Μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της αν το όριο

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

A_3:

α–Λάθος
β–Σωστό
γ–Σωστό
δ–Λάθος
ε–Σωστό

ΘΕΜΑ Β:

B_1: $f'(x) = 6x^2 + 2ax - 12$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

B_2: Αφού η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$ είναι παράλληλη στον $x'x$ έχουμε:

$$f'(1) = 0$$

Όμως,

$f'(1) = 6 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 - 12$

$f'(1) = 6 + 2a - 12$

$f'(1) = 2a - 6$

Άρα,

$$2a - 6 = 0 \Leftrightarrow a = 3.$$

B_3: Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, με παράγωγο:

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12,\ x \in \mathbb{R}$$

Λύνουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0$$

Λύσεις: $x_1 = 1$, $x_2 = -2$.

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
f'	$+$	$-$	$+$	
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

<u>Μονοτονία:</u> Η $f \nearrow (-\infty, -2]$, $f \searrow [-2, 1]$, $f \nearrow [1, +\infty)$.

<u>Ακρότατα:</u> Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x = -2$ με τιμή $f(-2) = 30$ και τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x = 1$ με τιμή $f(1) = 3$.

B_4: $\lim\limits_{x\to1} \frac{f'(x)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} \frac{6x^2+6x-12}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} \frac{6(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} 6(x+2) = 18.$

ΘΕΜΑ Γ:

Γ_1: Καταρχάς, $x_3 = \frac{16+20}{2} = 18$ και $x_4 = \frac{20+24}{2} = 22$, άρα ο πίνακας γίνεται:

Κλάσεις [,)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα ν_i	$x_i \nu_i$
$[8,12)$	10	20	200
$[12,16)$	14	15	210
$[16,20)$	18	ν_3	$18\nu_3$
$[20,24)$	22	5	110
	Σύνολο	$40+\nu_3$	$520+18\nu_3$

Αφού $\overline{x} = 14$ έχουμε:

$\frac{\sum xivi}{v} = 14 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{18v_3+520}{v_3+40} = \frac{14}{1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 18v_3 + 520 = 14v_3 + 560 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 18v_3 - 14v_3 = 560 - 520 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4v_3 = 40 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v_3 = 10.$

Γ_2: Αφού $v_3 = 10$ ο πίνακας γίνεται:

Κλάσεις [,)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα ν_i	$x_i\nu_i$
$[8,12)$	10	20	200
$[12,16)$	14	15	210
$[16,20)$	18	10	180
$[20,24)$	22	5	110
	Σύνολο	50	700

Γ_3: Έχουμε:

Κλάσεις [,)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα ν_i	$x_i\nu_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot \nu_i$
$[8,12)$	10	20	200	−4	16	320
$[12,16)$	14	15	210	0	0	0
$[16,20)$	18	10	180	4	16	160
$[20,24)$	22	5	110	8	64	320
	Σύνολο	50	700			800

Άρα, για τη διακύμανση:

$s^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2 \cdot vi}{v} = \frac{800}{50} = 16.$

Γ_4: Για την τυπική απόκλιση έχουμε: $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{16} = 4$. Επομένως,

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{4}{14} > \frac{1}{10}.$$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ:

Δ_1: $f(x) = -\frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$.

Για την παράγωγο έχουμε:

$f'(x) = -\left(\frac{1}{x^2}\right)'$

$f'(x) = -\left(\frac{(1)' \cdot x^2 - 1 \cdot (x^2)'}{(x^2)^2}\right)$

$f'(x) = -\left(\frac{-2x}{x^4}\right)$

$f'(x) = \frac{2}{x^3}$, $x \neq 0$

Παρατηρούμε ότι:

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$

Επομένως,

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$+$
f	$\searrow$	‖	$\nearrow$

<u>Μονοτονία:</u> Η $f \searrow (-\infty, 0)$, $f \nearrow (0, +\infty)$.

$\mathbf{\Delta_2}$**:** Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-4,-1]$. Άρα:

$-4 \leq x \leq -1 \Rightarrow$

$f(-4) \geq f(x) \geq f(-1) \Rightarrow$

$-\frac{1}{16} \geq f(x) \geq -1 \Rightarrow$

$-1 \leq f(x) \leq -\frac{1}{16}$

$\mathbf{\Delta_3}$**:**

$f(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\qquad$ $f'(x) = \frac{2}{x^3}$

$f(1) = -1$ $\qquad$ $f'(1) = 2$

Έστω $\varepsilon : y = \lambda_\varepsilon x + \beta_\varepsilon$ η ζητούμενη εφαπτομένη.

Τότε: $\lambda_\varepsilon = f'(1) = 2$.

Άρα, $\varepsilon : y = 2x + \beta_\varepsilon$.

$M(1,-1) \in \varepsilon : y = 2x + \beta_\varepsilon \Leftrightarrow -1 = 2 + \beta_\varepsilon \Leftrightarrow \beta_\varepsilon = -3$.

Επομένως, $\varepsilon : y = 2x - 3$.

$\mathbf{\Delta_4}$**:** Έχουμε ότι: $y_i = 2x_i - 3$, $i = 1,2,3$. Επομένως,

$\overline{y} = 2\overline{x} - 3$ $\qquad$ $s_y = 2s_x$

$\overline{y} = 5$ $\qquad$ $s_y = 4$.

Άρα, $CV_y = \frac{4}{5}$.