



ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ' ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
Τετάρτη 17 Ιουνίου 2020  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΟΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

*(Ενδεικτικές Απαντήσεις)*

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 111

**A2.** Σελίδα 104 σχολικού βιβλίου.

**A3.** Θεώρημα σελίδα 74 σχολικού βιβλίου

**A4. (α)** Ψ

**(β)** Για παράδειγμα για την συνάρτηση  $f(x) = x$  ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  ενώ το

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)}$  δεν υπάρχει (σελίδα 61 σχολικού βιβλίου)

**A5.**

**α)** Σωστό

**β)** Σωστό

**γ)** Λάθος

## ΘΕΜΑ Β

$$\mathbf{B1.} \quad f(x) = \frac{3x+1}{x-3} = \frac{3x-9+10}{x-3} = \frac{3(x-3)+10}{x-3} = 3 + \frac{10}{x-3}$$

Έστω  $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{3\}$  με  $f(x_1) = f(x_2)$  τότε

$$3 + \frac{10}{x_1-3} = 3 + \frac{10}{x_2-3} \Leftrightarrow \frac{10}{x_1-3} = \frac{10}{x_2-3} \Leftrightarrow 10x_2 - 30 = 10x_1 - 30 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η  $f$  είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται

**B2.** Για  $x \neq 3$

$$f(x) = y \Leftrightarrow 3 + \frac{10}{x-3} = y \Leftrightarrow \frac{10}{x-3} = y-3 \Leftrightarrow \frac{y-3}{10} = \frac{x-3}{10} \Leftrightarrow x-3 = \frac{10}{y-3} \Leftrightarrow x = 3 + \frac{10}{y-3}$$

$$\text{άρα } f^{-1}(x) = 3 + \frac{10}{x-3}, x \neq 3$$

Άρα  $f(x) = f^{-1}(x)$  για κάθε  $x \neq 3$

$$\mathbf{B3} \quad (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(3 + \frac{10}{x-3}\right) = x, x \neq 3$$

**B4.** Παρατηρούμε ότι  $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} f(x) = 0$  και

$$\left| f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right| = |f(x)| \cdot \left| \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right| \leq |f(x)|$$

$$\text{Επομένως } -|f(x)| \leq f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \leq |f(x)|$$

Για τιμές του  $x$  κοντά στο  $-\frac{1}{3}$  ισχύει  $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} (-|f(x)|) = 0$  επομένως

$$\text{σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής } \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \left( f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right) = 0$$

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  η γωνία  $A$  είναι εγγεγραμμένη στο τόξο  $B\Gamma$  άρα ισούται με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης που βαίνει στο ίδιο τόξο με αυτή.

Άρα  $\text{BO}\Gamma = 2\theta$  και επειδή  $\text{BOM} = \theta$  άρα και  $\text{MO}\Gamma = \theta$ , δηλαδή στο ισοσκελές τρίγωνο  $\text{BOM}$  η  $\text{OM}$  είναι διχοτόμος της γωνίας της κορυφής άρα η  $\text{OM}$  είναι διάμεσος και ύψος.

Επομένως στο τρίγωνο  $\text{OMB}$  το οποίο είναι

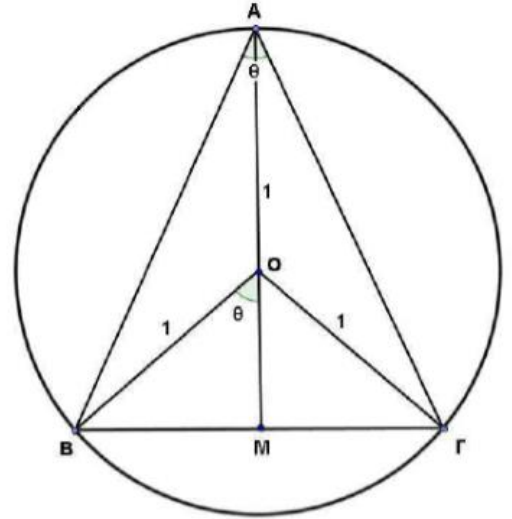
ορθογώνιο ισχύει  $\eta\mu\theta = \frac{\text{BM}}{\text{OB}} \Leftrightarrow \text{BM} = \eta\mu\theta$

Άρα  $\text{B}\Gamma = 2 \cdot \text{BM} = 2\eta\mu\theta$

$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\text{OM}}{\text{OB}} \Leftrightarrow \text{OM} = \sigma\upsilon\nu\theta$

$E = \frac{1}{2} \text{B}\Gamma \cdot \text{AM} = \frac{1}{2} 2\eta\mu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta)$  επομένως

$E(\theta) = \eta\mu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta)$



*Η παραπάνω σχέση αποδείχθηκε θεωρώντας τη γωνία  $\theta$  οξεία, ο ίδιος τύπος ισχύει και για την αμβλεία.*

**Γ2.** Η συνάρτηση  $E(\theta) = \eta\mu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta)$  με  $\theta \in (0, \pi)$  είναι παραγωγίσιμη με

$$E'(\theta) = \sigma\upsilon\nu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta) + \eta\mu\theta(-\eta\mu\theta) = \sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta - \eta\mu^2\theta$$

$$= \sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta - (1 - \sigma\upsilon\nu^2\theta) = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1$$

$E'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = -1$  ή  $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$  και επειδή  $\theta \in (0, \pi)$  δεκτή μόνο η

$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$  από την οποία προκύπτει  $\theta = \frac{\pi}{3}$

**1<sup>ος</sup> τρόπος**

Η  $E'$  είναι συνεχής στο διάστημα  $(0, \pi)$  και μηδενίζεται όταν  $\theta = \frac{\pi}{3}$  άρα

διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα  $\left(0, \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$

Διάστημα	$\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$
Επιλεγμένος $\theta_0$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$E'(\theta_0)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
Πρόσημο της $E'(\theta)$	+	-

### 2<sup>ος</sup> τρόπος

$$E'(\theta) = 2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 = 2(\sin\theta + 1)\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\right)$$

$$E'(\theta) > 0 \Leftrightarrow 2(\sin\theta + 1)\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow \sin\theta - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow \sin\theta > \sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x < \frac{\pi}{3}$$

Διότι η συνάρτηση συνημίτονο είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(0, \pi)$

**Ε**φόσον βρήκαμε το πρόσημο της  $E'$  έχουμε βρει και τα διαστήματα μονοτονίας της  $E$

x	$-\infty$	$\frac{\pi}{3}$	$+\infty$
$E'(\theta)$		+	-
$E(\theta)$		↗	↘

Επομένως το εμβαδόν γίνεται μέγιστο για  $x = \frac{\pi}{3}$

**Γ3.** Στο διάστημα  $A_1 = \left(0, \frac{\pi}{3}\right]$  η  $E(\theta)$  συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα

$$E(A_1) = \left(\lim_{\theta \rightarrow 0^+} E(\theta), E\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$$

Ο αριθμός  $\frac{3}{4} \in E(A_1)$  άρα υπάρχει  $\theta_1 \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$  ώστε  $E(\theta_1) = \frac{3}{4}$ , το  $\theta_1$  μοναδικό διότι η  $E(\theta)$  γνησίως αύξουσα στο  $A_1$

Στο διάστημα  $A_2 = \left[ \frac{\pi}{3}, \pi \right)$  η  $E(\theta)$  συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα

$$E(A_2) = \left( \lim_{\theta \rightarrow \pi} E(\theta), E\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] = \left( 0, \frac{3\sqrt{3}}{4} \right]$$

Ο αριθμός  $\frac{3}{4} \in E(A_2)$  άρα υπάρχει  $\theta_2 \in \left( \frac{\pi}{3}, \pi \right)$  ώστε  $E(\theta_2) = \frac{3}{4}$ , το  $\theta_2$  μοναδικό διότι η  $E(\theta)$  γνησίως φθίνουσα στο  $A_2$

Άρα υπάρχουν μόνο δύο  $\theta_1, \theta_2 \in (0, \pi)$  με  $\theta_1 < \theta_2$  ώστε  $E(\theta_1) = \frac{3}{4}$  και  $E(\theta_2) = \frac{3}{4}$

**Γ4.** Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης τιμής για την συνάρτηση  $E(\theta)$  στα διαστήματα  $\left[ \theta_1, \frac{\pi}{3} \right]$  και  $\left[ \frac{\pi}{3}, \theta_2 \right]$  οπότε υπάρχουν  $\xi_1, \xi_2$  που ανήκουν στα  $\left( \theta_1, \frac{\pi}{3} \right)$  και  $\left( \frac{\pi}{3}, \theta_2 \right)$  αντίστοιχα έτσι ώστε :

$$E'(\xi_1) = \frac{E\left(\frac{\pi}{3}\right) - E(\theta_1)}{\frac{\pi}{3} - \theta_1} \quad (1) \quad \text{και} \quad E'(\xi_2) = \frac{E(\theta_2) - E\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\theta_2 - \frac{\pi}{3}} \quad (2)$$

$$(1) : E'(\xi_1) \cdot \left( \frac{\pi}{3} - \theta_1 \right) = E\left(\frac{\pi}{3}\right) - E(\theta_1)$$

$$(2) : E'(\xi_2) \left( \theta_2 - \frac{\pi}{3} \right) = E(\theta_2) - E\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Άρα :

$$E'(\xi_1) \cdot \left( \frac{\pi}{3} - \theta_1 \right) = E\left(\frac{\pi}{3}\right) - E(\theta_1) = E\left(\frac{\pi}{3}\right) - E(\theta_2) = -E'(\xi_2) \left( \theta_2 - \frac{\pi}{3} \right) = E'(\xi_2) \left( \frac{\pi}{3} - \theta_2 \right)$$

## ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση  $f(x) = x \ln x - \ln(\lambda x)$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με

$$f'(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$$

και  $f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$  για κάθε  $x > 0$  άρα η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα

και έχει προφανή ρίζα την  $x = 1$  η οποία είναι μοναδική εφόσον  $f'$  γνησίως αύξουσα.

Το πρόσημο της  $f'$  είναι :

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow x > 1 \quad \text{και} \quad f'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		↘	↗

Άρα για  $x = 1$  η  $f$  έχει ελάχιστο το  $f(1) = -\ln \lambda$

Δ2. Για κάθε  $x > 0$  έχουμε :

$$x^x \geq \lambda x \Leftrightarrow \ln x^x \geq \ln(\lambda x) \Leftrightarrow x \ln x - \ln(\lambda x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$$

Για να είναι η  $f$  μη αρνητική εφόσον παρουσιάζει ελάχιστο θα πρέπει η ελάχιστη τιμή της να είναι μη αρνητική δηλαδή :

$$-\ln \lambda \geq 0 \Leftrightarrow \ln \lambda \leq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq 1$$

άρα η μεγαλύτερη τιμή του  $\lambda$  είναι το 1

**Δ3.** Έστω  $A(x_0, g(x_0))$  σημείο της  $C_g$ , η εξίσωση εφαπτομένης της είναι :  
 $y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0)$  η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων όταν  
 $0 - g(x_0) = g'(x_0)(0 - x_0) \Leftrightarrow g(x_0) = x_0 g'(x_0)$

$$\Leftrightarrow g(x_0) = x_0 (\ln x_0 + 1) \cdot g'(x_0) \Leftrightarrow 1 = x_0 (\ln x_0 + 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x_0} = \ln x_0 + 1 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$$

Άρα η ευθεία  $y = x$  είναι η μοναδική εφαπτομένη της  $C_g$  η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

**Δ4.**

(i)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x}$ , θέτουμε  $u = x \ln x$  άρα

$$u_0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} u = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{-\infty}{+\infty}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

Επομένως  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^u = 1$  και επειδή  $h(1) = 1$  η συνάρτηση  $h$  είναι συνεχής στο  $0$ , επίσης είναι συνεχής στο  $(0, +\infty)$  ως σύνθεση συνεχώς συναρτήσεων άρα είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

(ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση  $h(x) = x^{2020} \left( 3 - 2 \int_1^2 g(t) dt \right) + (1-x) \int_0^1 h(1-t) dt$

Η οποία είναι συνεχής στο  $[0, 1]$  ως πολυωνυμική και επιπλέον έχουμε :

$$h(0) = \int_0^1 h(1-t) dt \text{ κάνοντας την αντικατάσταση } u = 1-t \text{ προκύπτει}$$

$$h(0) = \int_0^1 h(u) du > 0 \text{ διότι } h(x) > 0 \text{ για κάθε } x \geq 0$$

Επομένως  $g(x) \geq x$  και η ισότητα ισχύει μόνο για  $x = 1$  άρα

$$\int_1^2 g(x) dx > \int_1^2 x dx \Leftrightarrow \int_1^2 g(x) dx > \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2 \int_1^2 g(x) dx > 3$$

$$h(1) = 3 - 2 \int_1^2 g(t) dt > 0 \text{ διότι :}$$

Η  $g$  είναι κυρτή στο πεδίο ορισμού της

$$g''(x) = \frac{1}{x} g(x) + (1 + \ln x)^2 g(x) > 0 \text{ άρα η γραφική της παράσταση βρίσκεται}$$

πάνω από οποιαδήποτε εφαπτομένη της με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Επομένω η  $h$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο  $[0,1]$  άρα η εξίσωση

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow x^{2020} \left( 3 - 2 \int_1^2 g(t) dt \right) + (1-x) \int_0^1 h(1-t) dt = 0 \text{ έχει μια τουλάχιστον ρίζα}$$

στο  $(0,1)$