Θέμα Α

Α1. Θεωρία (απόδειξη) – Σελίδα 28 του σχολικού βιβλίου

Επειδή $f(x)=x$,

έχουμε $f(x+h)=x+h$

Άρα, $f(x+h)-f(x)=x+h-x$

Δηλαδή $f(x+h)-f(x)=h$

Για $h\neq 0$, έχουμε:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{h}{h}$$

άρα: $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=1$$

Οπότε: $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=1$$

Επομένως: $(x)'=1$

Α2. Θεωρία (ορισμός) – Σελίδα 59

α) Οι ποσοτικές μεταβλητές είναι οι μεταβλητές των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί.

β) Οι ποσοτικές μεταβλητές διακρίνονται:

i) Σε διακριτές μεταβλητές, που παίρνουν μόνο «μεμονωμένες» τιμές.

ii) Σε συνεχείς μεταβλητές, που μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών (α,β).

Α3.

α)	Λάθος
β)	Σωστό
γ)	Λάθος
δ)	Λάθος
ε)	Σωστό

φροντιστήριο μέσης εκπαίδευσης συνειρμός

Θέμα Β

Β1. Η διακύμανση είναι $s^2 = 4$, επομένως η τυπική απόκλιση είναι $s = \sqrt{4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow s = 2$$

Επειδή οι τιμές του δείγματος 11, 7, κ, 13, 11, 10 είναι όλες θετικές (αφού $\kappa > 0$), η μέση τιμή $\bar{x}$ θα είναι επίσης θετικός αριθμός $(\bar{x} > 0)$.

Επομένως, έχουμε:

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20\% = \frac{2}{\bar{x}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{20}{100} = \frac{2}{\bar{x}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5} = \frac{2}{\bar{x}}$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} = 10$$

Β2. Οι τιμές του δείγματος είναι 11, 7, κ, 13, 11, 10
Άρα, η μέση τιμή του δείγματος είναι:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i}{\nu} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6}{\nu}$$

$$\Leftrightarrow 10 = \frac{11 + 7 + \kappa + 13 + 11 + 10}{6}$$

$$\Leftrightarrow 10 = \frac{\kappa + 52}{6}$$

$$\Leftrightarrow \kappa + 52 = 60$$

$$\Leftrightarrow \kappa = 60 - 52$$

$$\Leftrightarrow \kappa = 8$$

Β3. Για $\kappa = 8$, οι τιμές του δείγματος είναι:

11, 7, 8, 13, 11, 10

οι οποίες ταξινομούνται κατά αύξουσα σειρά ως εξής:

7, 8, 10, 11, 11, 13

Το μέγεθος του δείγματος είναι $\nu = 6$ (άρτιος αριθμός), επομένως η διάμεσός του είναι:

$$\delta = \frac{t_3 + t_4}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \delta = \frac{10 + 11}{2}$$

$$\Leftrightarrow \delta = \frac{21}{2}$$

$$\Leftrightarrow \delta = 10{,}5$$

Επιπλέον, το εύρος του δείγματος είναι:

$$R = t_6 - t_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R = 13 - 7$$

$$\Leftrightarrow R = 6$$

Β4. Έστω $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ οι τιμές του δείγματος των προηγούμενων ερωτημάτων, με μέση τιμή $\overline{x}=10$ και τυπική απόκλιση $s_x=2$.

Αν από κάθε τιμή του παραπάνω δείγματος αφαιρεθεί ο αριθμός 2, τότε προκύπτει ένα δείγμα με τιμές y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, με μέση τιμή $\overline{y}$ και τυπική απόκλιση s_y, για τις οποίες:

$$y_1 = x_1 - 2$$
$$y_2 = x_2 - 2$$
$$y_3 = x_3 - 2$$
$$y_4 = x_4 - 2$$
$$y_5 = x_5 - 2$$
$$y_6 = x_6 - 2$$

Δηλαδή, $y_i = x_i + c$, όπου $i = 1,2,3,4,5,6$ με $c=-2$

Άρα: $y_i = x_i - 2$, όπου $i = 1,2,3,4,5,6$

Σύμφωνα με εφαρμογή του σχολικού βιβλίου (σελίδα 99), ισχύουν:

$$\overline{y} = \overline{x} + c$$
$$\overline{y} = 10 - 2$$
$$\overline{y} = 8$$

$$s_y = s_x$$
$$s_y = 2$$

Επομένως, ο συντελεστής μεταβλητότητας του νέου δείγματος θα είναι:

$$CV_y = \frac{s_y}{\overline{y}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow CV_y = \frac{2}{8}$$
$$\Leftrightarrow CV_y = \frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow CV_y = 0,25$$
$$\Leftrightarrow CV_y = 25\% > 10\%,$$

άρα το δείγμα των νέων τιμών δεν είναι ομοιογενές.

Θέμα Γ

Γ1. Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 10}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με:

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2 - 2x + 10}\right)'$$
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 2x + 10}} \cdot \left(x^2 - 2x + 10\right)'$$
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 2x + 10}} \cdot (2x - 2)$$
$$f'(x) = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x + 10}}$$
$$f'(x) = \frac{2 \cdot (x - 1)}{2\sqrt{x^2 - 2x + 10}}$$

φροντιστήριο μέσης εκπαίδευσης συνειρμός

$$f'(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}}\text{, για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Γ2. Λύνουμε την εξίσωση: $f'(x)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}}=0$$
$$\Leftrightarrow x-1=0$$
$$\Leftrightarrow x=1$$

Λύνουμε την ανίσωση: $f'(x)>0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}}>0$$
$$\Leftrightarrow x-1>0$$
$$\Leftrightarrow x>1$$

Ο πίνακας προσήμων της f' – μονοτονίας της f έχει ως εξής:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

<u>Μονοτονία</u>:
$f \searrow (-\infty,1]$ και $f \nearrow [1,+\infty)$

<u>Ακρότατα</u>:
Η f παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x=1$, το ολικό ελάχιστο $f(1)=\sqrt{1^2-2\cdot1+10} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(1)=\sqrt{9}$$
$$\Leftrightarrow f(1)=3$$

<u>Ανισότητα</u>:
Επειδή το $f(1)$ είναι το ολικό ελάχιστο της f, θα ισχύει:

$$f(x)\geq f(1)\text{, για κάθε } x\in D_f=\mathbb{R}$$
$$f(x)\geq 3\text{, για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Γ3. Έστω ε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο της $M(5,f(5))$.

Το σημείο επαφής ε με C_f είναι το $M(5,f(5))$. Έχουμε:

$$f(x)=\sqrt{x^2-2x+10}$$
$$f(5)=\sqrt{5^2-2\cdot5+10}$$
$$f(5)=\sqrt{25-10+10}$$
$$f(5)=\sqrt{25}$$
$$f(5)=5$$

$$f'(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}}$$
$$f'(5)=\frac{5-1}{\sqrt{5^2-2\cdot5+10}}$$
$$f'(5)=\frac{4}{5}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$\varepsilon: y=\lambda_\varepsilon\cdot x+\beta_\varepsilon$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε είναι $\lambda_\varepsilon=f'(5)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=\frac{4}{5}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης γίνεται:

φροντιστήριο μέσης εκπαίδευσης συνειρμός

$$\varepsilon : y = \frac{4}{5} \cdot x + \beta_\varepsilon$$

Όμως, το σημείο επαφής ανήκει στην εφαπτομένη, άρα:

$$M\left(5, f\left(5\right)\right) \equiv M\left(5,5\right) \in \varepsilon : y = \frac{4}{5} \cdot x + \beta_\varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 5 = \frac{4}{5} \cdot 5 + \beta_\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad 5 = 4 + \beta_\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow 4 + \beta_\varepsilon = 5$$

$$\Leftrightarrow \quad \beta_\varepsilon = 5 - 4$$

$$\Leftrightarrow \quad \beta_\varepsilon = 1$$

Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$\varepsilon : y = \frac{4}{5} \cdot x + 1$$

Γ4. Έστω A το σημείο τομής της ε με τον $x'x$.

$\underline{\varepsilon \cap x'x}$

$$\begin{cases} \varepsilon : y = \frac{4}{5}x + 1 & (1) \\ x'x : y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \quad 0 = \frac{4}{5}x + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4}{5}x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 5 \cdot \frac{4}{5}x + 5 \cdot 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x = -5$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{5}{4}$$

Επομένως, το σημείο τομής της ε με τον άξονα $x'x$ είναι το $\mathrm{A}\left(-\frac{5}{4}, 0\right)$

Έστω B το σημείο τομής της ε με τον $y'y$.

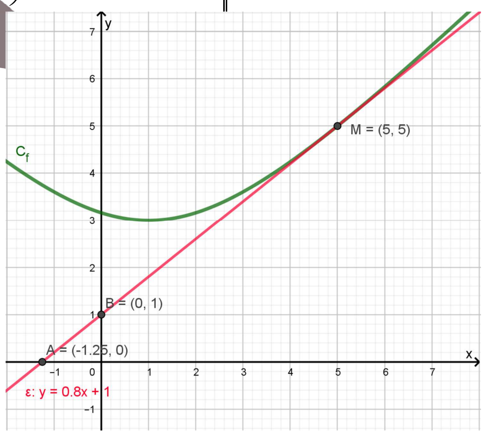
$\underline{\varepsilon \cap y'y}$

$$\begin{cases} \varepsilon : y = \frac{4}{5}x + 1 & (4) \\ y'y : x = 0 & (5) \end{cases}$$

$$(4) \overset{(5)}{\Leftrightarrow} y = \frac{4}{5} \cdot 0 + 1$$

$$\Leftrightarrow y = 1$$

Επομένως, το σημείο τομής της ε με τον άξονα $y'y$ είναι το $\mathrm{B}\left(0,1\right)$



Θέμα Δ

Δ1. Για $\lambda = 3$, έχουμε: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, με:

$$f'(x) = \left(x^3 - 3x^2 + 3x\right)'$$
$$f'(x) = \left(x^3\right)' - 3\cdot\left(x^2\right)' + 3\cdot(x)'$$
$$f'(x) = 3x^2 - 3\cdot 2x + 3\cdot 1$$
$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$
$$f'(x) = 3\left(x^2 - 2x + 1\right)$$
$$f'(x) = 3(x-1)^2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Όμως, $f'(x) = 3(x-1)^2 \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα $f'(x) = 0$ να ισχύει μόνο για $x = 1$.
Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν παρουσιάζει ακρότατα.
Επιπλέον:

$$\frac{3}{8} = \frac{3\cdot 3}{8\cdot 3} = \frac{9}{24}$$
$$\frac{5}{6} = \frac{5\cdot 4}{6\cdot 4} = \frac{20}{24}$$

Άρα, $\frac{3}{8} < \frac{5}{6} \overset{f \nearrow \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{3}{8}\right) < f\left(\frac{5}{6}\right)$

Δ2. Για $\lambda = 3$, έχουμε: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ και $f'(x) = 3(x-1)^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Άρα:

$$\ell = \lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x^2-x\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)^2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x^2-x\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)^2}{\left(\sqrt{x}-1\right)x(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)^2\left(\sqrt{x}+1\right)}{x(x-1)\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)^2\left(\sqrt{x}+1\right)}{x(x-1)\left[\left(\sqrt{x}\right)^2-1^2\right]} = \lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)^2\left(\sqrt{x}+1\right)}{x(x-1)(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)^2\left(\sqrt{x}+1\right)}{x(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}\frac{3\left(\sqrt{x}+1\right)}{x} = \frac{3\cdot\left(\sqrt{1}+1\right)}{1} = \frac{6}{1} = 6$$

Δ3. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ε της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f σε κάθε σημείο της $M(x, f(x))$ είναι $\lambda_\varepsilon = f'(x)$.

Για να βρούμε την ελάχιστη τιμή της $\lambda_\varepsilon = f'(x)$ θα πρέπει τη μελετήσουμε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατά της. Δηλαδή θα πρέπει να υπολογίσουμε προηγουμένως την $f''(x)$.

Η συνάρτηση $f'(x)=3x^2-6x+3$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f''(x)=\left(3x^2-6x+3\right)'$$

$$f''(x)=3\left(x^2\right)'-6(x)'+(3)'$$

$$f''(x)=3\cdot 2x-6\cdot 1+0$$

$$f''(x)=6x-6$$

$$f''(x)=6(x-1)$$

Λύνουμε την εξίσωση: $f''(x)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad 6x-6=0$$
$$\Leftrightarrow \quad 6x=6$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{6x}{6}=\frac{6}{6}$$
$$\Leftrightarrow \quad x=1$$

Λύνουμε την εξίσωση: $f''(x)>0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad 6x-6>0$$
$$\Leftrightarrow \quad 6x>6$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{6x}{6}>\frac{6}{6}$$
$$\Leftrightarrow \quad x>1$$

Ο πίνακας προσήμων της f'' – μονοτονίας της f' έχει ως εξής:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$\lambda_\varepsilon=f'(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

<u>Μονοτονία</u>:

$f' \searrow (-\infty,1]$ και $f' \nearrow [1,+\infty)$

<u>Ακρότατα</u>:

Η f' παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x=1$, το ολικό ελάχιστο $f'(1)=3\cdot 1^2-6\cdot 1+3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f'(1)=3-6+3$$

$$\Leftrightarrow f'(1)=0$$

Άρα, ο ελάχιστος συντελεστής διεύθυνσης είναι $\lambda_{\varepsilon\lambda\alpha\chi}=f'(1)=0$.

Επιπλέον, $f(1)=1^3-3\cdot 1^2+3\cdot 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(1)=1-3+3$$

$$\Leftrightarrow f(1)=1$$

Τέλος, το σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης είναι το $M(1,f(1))\equiv M(1,1)$

Δ4. Έχουμε $f(x)=x^3-3x^2+\lambda x$, $x\in\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, με:

$$f'(x)=\left(x^3-3x^2+\lambda x\right)'$$

$$f'(x)=\left(x^3\right)'-3\cdot\left(x^2\right)'+\lambda\cdot(x)'$$

$$f'(x)=3x^2-3\cdot 2x+3\cdot\lambda$$

$$f'(x)=3x^2-6x+\lambda$$

Λύνουμε $f'(x)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x^2-6x+\lambda=0$

$\alpha=3$	$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$
$\beta=-6$	$\Delta=(-6)^2-4\cdot3\cdot\lambda$
$\gamma=\lambda$	$\Delta=36-12\lambda$
	$\Delta=12(3-\lambda)$

Για να μην παρουσιάζει η f ακρότατα, θα πρέπει να ισχύει $f'(x)\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για να συμβεί αυτό θα πρέπει $\Delta\leq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 12(3-\lambda)\leq 0$$
$$\Leftrightarrow 3-\lambda\leq 0$$
$$\Leftrightarrow 3\leq\lambda$$
$$\Leftrightarrow \lambda\geq 3$$

Επομένως, η ελάχιστη τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ για την οποία η f δεν παρουσιάζει ακρότατα είναι $\lambda=3$.