Θέμα Α

Α1. Θεωρία – Σελίδα 212 του σχολικού βιβλίου

Υπάρχουν τρεις κατηγορίες σημείων για μια συνεχή συνάρτηση f, που μπορεί να θεωρηθούν ως πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων:

i. Τα άκρα διαστημάτων που αποτελούν το πεδίο ορισμού της f.

ii. Τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της f στα οποία δεν υπάρχει η παράγωγος της f. Τα σημεία αυτά καλούνται **γωνιακά σημεία** της f.

iii. Τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της f στα οποία υπάρχει η παράγωγος της f και είναι ίση με μηδέν. Τα σημεία αυτά καλούνται **στάσιμα σημεία** της f.

Τα γωνιακά και στάσιμα σημεία λέγονται **κρίσιμα σημεία** της f.

Α2.

α)	Λάθος
β)	Σωστό
γ)	Λάθος
δ)	Λάθος
ε)	Σωστό

Α3.

α) $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{x}dx=\left[\ell nx\right]_{\alpha}^{\beta}=\ell n\beta-\ell n\alpha$, με $\beta>\alpha>0$.

β) $(c)'=0$, αν c σταθερά.

γ) Αν η μεταβλητή x παίρνει τις τιμές $x_1,x_2,...,x_k$ με αντίστοιχες συχνότητες $v_1,v_2,...,v_k$ τότε η μέση τιμή της μεταβλητής είναι: $\bar{x}=\frac{v_1x_1+v_2x_2+...+v_kx_k}{v_1+v_2+...+v_k}=\frac{v_1x_1+v_2x_2+...+v_kx_k}{v}$.

Θέμα Β

Β1.

Έχουμε:

- $v_2=N_2-v_1=34-20=14$ και
- $v_1+v_2+v_3+v_4=50 \Leftrightarrow 20+14+12+v_4=50$
  $\Leftrightarrow 46+v_4=50$
  $\Leftrightarrow v_4=50-46$
  $\Leftrightarrow v_4=4$

Άρα:

Χρόνος σε λεπτά	Κέντρο κλάσης κ_i	Συχνότητα v_i	Αθροιστική συχνότητα N_i	$\kappa_i\cdot v_i$	$\bar{x}-\kappa_i$	$(\bar{x}-\kappa_i)^2$	$(\bar{x}-\kappa_i)^2\cdot v_i$
[5,15)	10	20	20	200	10	100	2000
[15,25)	20	14	34	280	0	0	0
[25,35)	30	12	46	360	-10	100	1200
[35,45)	40	4	50	160	-20	400	1600
Σύνολο		50		1000			4800

Β2.

Η μέση τιμή είναι: $\bar{x}=\dfrac{v_1x_1+v_2x_2+\ldots+v_kx_k}{v_1+v_2+\ldots+v_k}=\dfrac{v_1x_1+v_2x_2+\ldots+v_kx_k}{v}=\dfrac{1000}{50}=20$ λεπτά.

Β3.

Η διακύμανση είναι: $s^2=\dfrac{(\bar{x}-x_1)^2\cdot v_1+(\bar{x}-x_2)^2\cdot v_2+\ldots+(\bar{x}-x_k)^2\cdot v_k}{v_1+v_2+\ldots+v_k}=$

$$=\frac{(\bar{x}-x_1)^2\cdot v_1+(\bar{x}-x_2)^2\cdot v_2+(\bar{x}-x_3)^2\cdot v_3+(\bar{x}-x_4)^2\cdot v_4}{v_1+v_2+\ldots+v_k}=$$

$$=\frac{4800}{50}=$$

$=96$ λεπτά^2.

Επομένως, η τυπική απόκλιση είναι: $s=\sqrt{96}\approx 10$ λεπτά.

Β4.

Ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι: $CV\%=\dfrac{s}{\bar{x}}\cdot 100\%=\dfrac{\sqrt{96}}{20}\cdot 100\%\approx\dfrac{10}{20}\cdot 100\%=50\%$.

Θέμα Γ

Γ1.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(4x+4e^{x-2}\right)=4\cdot 2+4\cdot e^{2-2}=8+4\cdot e^0=8+4\cdot 1=8+4=12$.

Γ2.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x^3-8\right)=2^3-8=8-8=0$

και $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\lambda x-2\lambda\right)=\lambda\cdot 2-2\lambda=0$,

προκύπτει στο όριο $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ η απροσδιόριστη μορφή $\dfrac{0}{0}$.

<u>α' τρόπος:</u>

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^3-8}{\lambda x-2\lambda}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 2^+}\frac{x^3-2^3}{\lambda x-2\lambda}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)\cdot\left(x^2+x\cdot 2+2^2\right)}{\lambda(x-2)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{\cancel{(x-2)}\cdot\left(x^2+2x+4\right)}{\lambda\cdot\cancel{(x-2)}}=$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+2x+4}{\lambda}=$$

$$=\frac{2^2+2\cdot 2+4}{\lambda}=$$

$$=\frac{12}{\lambda}\ .$$

<u>β' τρόπος:</u>
Παραγοντοποιούμε το x^3-8 με τη βοήθεια του σχήματος Horner:

1	0	0	-8	2
	2	4	8	
1	2	4	0	

<u>Πηλίκο</u>: $\pi(x)=x^2+2x+4$

<u>Υπόλοιπο</u>: $\upsilon(x)=0$

<u>Ταυτότητα</u>: $x^3-8=(x-2)\cdot(x^2+2x+4)+0$

Άρα:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^3-8}{\lambda x-2\lambda}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 2^+}\frac{\cancel{(x-2)}\cdot(x^2+2x+4)}{\lambda\cdot\cancel{(x-2)}}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+2x+4}{\lambda}=\frac{2^2+2\cdot 2+4}{\lambda}=\frac{12}{\lambda}.$$

Γ3.

Ακόμα, έχουμε: $f(2)=4\cdot 2+4\cdot e^{2-2}=8+4\cdot e^0=8+4\cdot 1=8+4=12$.

Για να είναι η f συνεχής στο $x_0=2$, πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$$

Δηλαδή πρέπει: $\frac{12}{\lambda}=12 \Leftrightarrow 12\lambda=12 \Leftrightarrow \lambda=1$.

Γ4.

Για $\lambda=1$, έχουμε: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x-2} &, \text{αν } x>2\\ 4x+4e^{x-2} &, \text{αν } x\le 2\end{cases}$

Επειδή για $x\in[1,2]$, $f(x)=4x+4e^{x-2}$, έχουμε:

$$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2(4x+4e^{x-2})dx=\left[2x^2+4e^{x-2}\right]_1^2=(2\cdot 2^2+4e^{2-2})-(2\cdot 1^2+4e^{1-2})=8+4-2-4e^{-1}=$$
$$=10-\frac{4}{e}.$$

<u>Θέμα Δ</u>

Δ1.
Ο ρυθμός μεταβολής του βάρους του παγόβουνου είναι:

$$B'(t)=\left(-\frac{t^3}{3}+2t^2+12t+15\right)'$$

$$B'(t)=-\frac{1}{3}(t^3)'+2(t^2)'+12(t)'+(15)'$$

$$B'(t)=-\frac{1}{\cancel{3}}\cancel{3}t^2+2\cdot 2t+12\cdot 1+0$$

$\mathrm{B}'(t) = -t^2 + 4t + 12$ τόνοι/έτος , $0 \le t \le 10$.

Δ2.
Λύνουμε:

$$\mathrm{B}'(t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -t^2 + 4t + 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Delta = 4^2 - 4\cdot(-1)\cdot 12 = 16 + 48 = 64 > 0$, άρα έχουμε 2 λύσεις

$$t_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2\cdot(-1)} = \frac{-4 \pm 8}{-2} = \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{-4-8}{-2} = \dfrac{-12}{-2} = 6 \\ \dfrac{-4+8}{-2} = \dfrac{4}{-2} = -2 \end{array} \right.$$

$\Leftrightarrow$ $t = 6$ ή $t = -2$
δεκτή | απορρίπτεται

Ο πίνακας προσήμων της B' – μονοτονίας της B έχει ως εξής:

t	$-\infty$ … 0	0 … 6	6	6 … 10	10 … $+\infty$
$\mathrm{B}'(t)$		$+$	0	$-$	
$\mathrm{B}(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Άρα η B είναι:

- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,6]$ και
- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[6,10]$ και

Η B παρουσιάζει:

- (ολικό) μέγιστο στο $t_0 = 6$ έτη, το (ολικό) μέγιστο $\mathrm{B}(6) = -\dfrac{6^3}{3} + 2\cdot 6^2 + 12\cdot 6 + 15 = 87$

Επομένως, το βάρος του παγόβουνου γίνεται μέγιστο τη χρονική στιγμή $t_0 = 6$ έτη.
Το μέγιστο βάρος του παγόβουνου είναι $\mathrm{B}(6) = 87$ τόνοι.

Δ3.
Για $t \in [6,9]$ η συνάρτηση B είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα:

$$t \in [6,9] \Leftrightarrow 6 \le t \le 9 \overset{\mathrm{B}\searrow[6,9]}{\Leftrightarrow} \mathrm{B}(6) \ge \mathrm{B}(t) \ge \mathrm{B}(9) \Leftrightarrow \mathrm{B}(9) \le \mathrm{B}(t) \le \mathrm{B}(6).$$

Δ4.
Ο ρυθμός μεταβολής του βάρους είναι $\mathrm{B}'(t) = -t^2 + 4t + 12$ τόνοι/έτος , $0 \le t \le 10$.
Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση $\mathrm{B}'(t) = -t^2 + 4t + 12$ και παίρνουμε:

$$\mathrm{B}''(t) = \left(-t^2 + 4t + 12\right)'$$

$$\mathrm{B}''(t) = -\left(t^2\right)' + 4(t)' + (12)'$$

$$\mathrm{B}''(t) = -2t + 4\cdot 1 + 0$$

$$\mathrm{B}''(t) = -2t + 4$$

Λύνουμε:

$$\mathrm{B}''(t)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2t+4=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2t=-4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{-2}t}{\cancel{-2}}=\frac{-4}{-2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t=2$$

Ο πίνακας προσήμων της B'' – μονοτονίας της B' έχει ως εξής:

t	$-\infty$ 0	0 2	2	2 10	10 $+\infty$
$\mathrm{B}''(t)$		$+$	0	$-$	
$\mathrm{B}'(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Άρα η B' είναι:

- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,2]$ και
- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2,10]$ και

Η B' παρουσιάζει:

- (ολικό) μέγιστο στο $t_1=2$ έτη, το (ολικό) μέγιστο $\mathrm{B}'(2)=-2^2+4\cdot 2+12=12$ τόνοι/έτος

Επομένως, ο ρυθμός μεταβολής του βάρους του παγόβουνου γίνεται μέγιστος τη χρονική στιγμή $t_1=2$ έτη.
Ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής του βάρους του παγόβουνου είναι $\mathrm{B}'(2)=-2^2+4\cdot 2+12=16$ τόνοι/έτος.