Θέμα Α

Α1. Θεωρία (απόδειξη), σελίδα 253 σχολικού βιβλίου.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

Α2. Θεωρία (Ορισμός), σελίδα 191 σχολικού βιβλίου.

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον

$$\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = f(\alpha) \quad \text{και} \quad \lim_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

Α3. Θεωρία (Ορισμός), σελίδα 258 σχολικού βιβλίου.

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in \mathrm{A}$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε

$$f(x) \le f(x_0) \text{ για κάθε } x \in \mathrm{A} \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

(Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f).

Α4.

α)	Σωστό
β)	Σωστό
γ)	Λάθος
δ)	Λάθος
ε)	Λάθος

Θέμα Β

Β1.

α' τρόπος:

$$\begin{aligned}
|z-1|^2 + |z+1|^2 &= 4 \\
(z-1)\cdot(\bar{z}-1) + (z+1)\cdot(\bar{z}+1) &= 4 \\
z\cdot\bar{z} - z - \bar{z} + 1 + z\cdot\bar{z} + z + \bar{z} + 1 &= 4 \\
2z\cdot\bar{z} + 2 &= 4 \\
2z\bar{z} &= 2 \\
z\bar{z} &= 1 \\
|z| &= 1 \\
|z - (0 + 0i)| &= 1
\end{aligned}$$

Επομένως, ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων $M(z) = (x, y)$ των μιγαδικών $z = x + yi$ είναι ο κύκλος $C_1(\mathrm{O}, \rho)$ με:

- Κέντρο $O(0,0)$,
- Ακτίνα $\rho = 1$ και
- Εξίσωση $C_1 : x^2 + y^2 = 1$

δηλαδή, ο μοναδιαίος κύκλος.

<u>β' τρόπος</u>:
Έστω $z = x + yi$, όπου $x, y \in \mathbb{R}$. Έχουμε:

$$|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4$$
$$|x+yi-1|^2 + |x+yi+1|^2 = 4$$
$$|(x-1)+yi|^2 + |(x+1)+yi|^2 = 4$$
$$\left(\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x+1)^2+y^2}\right)^2 = 4$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + x^2 + 2x + 1 + y^2 = 4$$
$$2x^2 + 2y^2 + 2 = 4$$
$$2x^2 + 2y^2 = 2$$
$$x^2 + y^2 = 1$$
$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = 1^2$$

Επομένως, ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων $M(z) = (x, y)$ των μιγαδικών $z = x + yi$ είναι ο κύκλος $C_1(O, \rho)$ με:

- Κέντρο $O(0,0)$ και
- Ακτίνα $\rho = 1$,

δηλαδή, ο μοναδιαίος κύκλος.

Β2.
<u>α' τρόπος</u>:
Επειδή οι μιγαδικοί z_1 και z_2 είναι από τους μιγαδικούς για τους οποίους ισχύει η σχέση (1), δηλαδή είναι μιγαδικοί των οποίων οι εικόνες ανήκουν στον μοναδιαίο κύκλο C_1, οι εικόνες τους θα απέχουν από το κέντρο του κύκλου $O(0,0)$ απόσταση ίση με $\rho = 1$. Άρα:

$$|z_1 - (0+0i)| = 1 \quad \text{και} \quad |z_2 - (0+0i)| = 1, \quad \text{δηλαδή:}$$
$$|z_1| = 1 \quad \text{και} \quad |z_2| = 1$$

Ισοδύναμα:
$$|z_1|^2 = 1^2 \quad \text{και} \quad |z_2|^2 = 1^2$$
$$z_1\overline{z}_1 = 1 \quad (3) \quad \text{και} \quad z_2\overline{z}_2 = 1 \quad (4)$$

Ακόμα, ισχύει:

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$$
$$|z_1 - z_2|^2 = \sqrt{2}^2$$
$$(z_1 - z_2)\cdot(\overline{z}_1 - \overline{z}_2) = 2$$
$$z_1\overline{z}_1 - z_1\overline{z}_2 - \overline{z}_1 z_2 + z_2\overline{z}_2 = 2$$

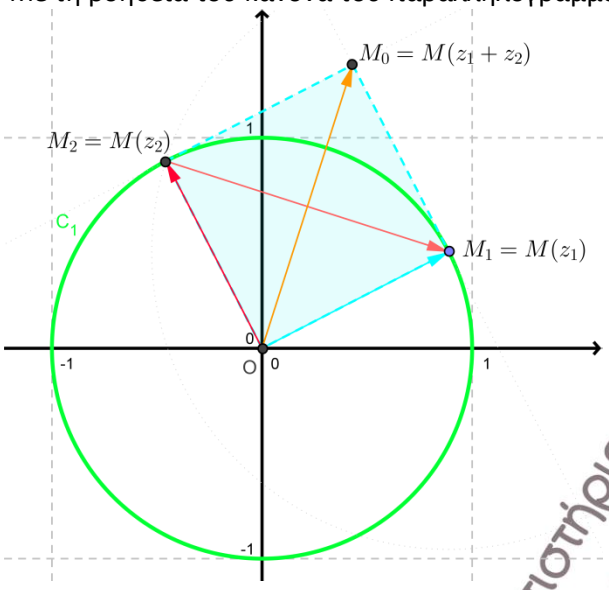
φροντιστήριο μέσης εκπαίδευσης συνειρμός

$$1-z_1\overline{z}_2-\overline{z}_1z_2+1=2$$
$$z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2=0 \quad (5)$$

$$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\cdot(\overline{z}_1+\overline{z}_2)=z_1\overline{z}_1+z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2+z_2\overline{z}_2 \underset{(5)}{\overset{(1),(2)}{=}} 1+0+1=2$$

Άρα, $|z_1+z_2|=\sqrt{2}$

<u>β' τρόπος</u>:
Με τη βοήθεια του κανόνα του παραλληλογράμμου, κατασκευάζουμε το σχήμα:



Έστω:
$M(z_1)=M_1$ η εικόνα του μιγαδικού z_1,
$M(z_2)=M_2$ η εικόνα του μιγαδικού z_2 και
$M(z_1+z_2)=M_0$ η εικόνα του μιγαδικού z_1+z_2.
Γι' αυτό $|z_1+z_2|=|\overrightarrow{OM_0}|=(OM_0)$
Το $\overrightarrow{M_2M_1}$ είναι η διανυσματική ακτίνα του μιγαδικού z_1-z_2, ενώ ισχύει:
$|z_1-z_2|=|\overrightarrow{M_2M_1}|=(M_1M_2)=\sqrt{2}$.
Ακόμα:
$|z_1|=|\overrightarrow{OM_1}|=(OM_1)=\rho=1$ και
$|z_2|=|\overrightarrow{OM_2}|=(OM_2)=\rho=1$

Στο τρίγωνο OM_1M_2 έχουμε:
$(OM_1)^2+(OM_2)^2=1^2+1^2=1+1=2$ και
$(M_1M_2)^2=\sqrt{2}^2=2$

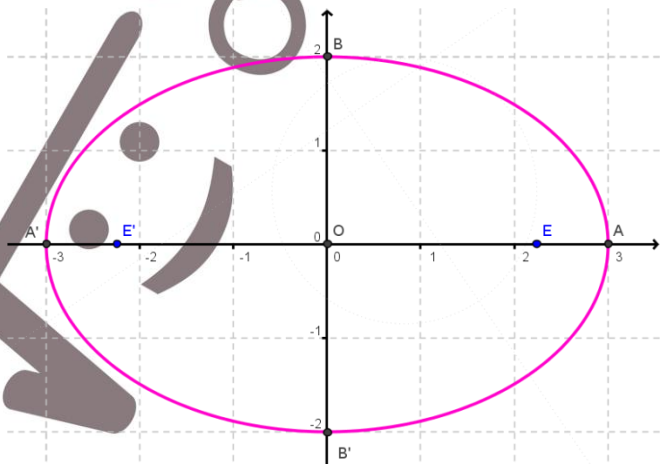
Άρα, ισχύει το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος. Επομένως, $M_1\hat{O}M_2=90^\circ$.
Το τετράπλευρο $OM_1M_0M_2$ είναι παραλληλόγραμμο, με δυο διαδοχικές πλευρές ίσες $(OM_1)=(OM_2)$ και μια γωνία ορθή $M_1\hat{O}M_2=90^\circ$.
Επομένως το τετράπλευρο $OM_1M_0M_2$ είναι τετράγωνο.
Γι' αυτό, θα έχει τις διαγώνιους του ίσες, δηλαδή:
$$|z_1+z_2|=|\overrightarrow{OM_0}|=(OM_0)=(M_1M_2)=\sqrt{2}$$

Β3.
Έστω $w=x+yi$, όπου $x,y\in\mathbb{R}$. Έχουμε:
$$|w-5\overline{w}|=12$$
$$|(x+yi)-5(x-yi)|=12$$
$$|x+yi-5x+5yi|=12$$
$$|(-4x)+6yi|=12$$
$$\sqrt{(-4x)^2+(6y)^2}=12$$

$$\left(\sqrt{16x^2+36y^2}\right)^2=12^2$$
$$16x^2+36y^2=144$$
$$\frac{16x^2}{144}+\frac{36y^2}{144}=\frac{144}{144}$$
$$\frac{x^2}{\frac{144}{16}}+\frac{y^2}{\frac{144}{36}}=\frac{144}{144}$$
$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$
$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$$

Επομένως, ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων $M(w)=(x,y)$ των μιγαδικών $w=x+yi$ είναι η έλλειψη C_2, με:

- $\alpha=3$
- $\beta=2$
- $\gamma=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$
- (Εστίες $\mathrm{E}\left(\sqrt{5},0\right)$, $\mathrm{E}'\left(-\sqrt{5},0\right)$ που βρίσκονται στον $x'x$)
- Μεγάλο άξονα $(2\alpha)=6$
- Μικρό άξονα $(2\beta)=4$
- Κορυφές $\mathrm{A}(3,0)$, $\mathrm{A}'(-3,0)$, $\mathrm{B}(0,2)$ και $\mathrm{B}'(0,-2)$
- Κέντρο $\mathrm{O}(0,0)$



Το μέτρο $|w|$ του μιγαδικού αριθμού w εκφράζει την απόσταση της εικόνας του μιγαδικού w από την αρχή των αξόνων $\mathrm{O}(0,0)$. Άρα:

- Το μέτρο $|w|$ γίνεται μέγιστο, όταν η εικόνα του μιγαδικού w ταυτίζεται με την κορυφή A ή με την κορυφή A'. Τότε, $|w|_{\text{μέγιστο}}=(\mathrm{OA})=(\mathrm{OA}')=\alpha=3$
- Το μέτρο $|w|$ γίνεται ελάχιστο, όταν η εικόνα του μιγαδικού w ταυτίζεται με την κορυφή B ή με την κορυφή B'. Τότε, $|w|_{\text{ελάχιστο}}=(\mathrm{OB})=(\mathrm{OB}')=\beta=2$

Β4.

α' τρόπος:

- Οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν στον μοναδιαίο κύκλο. Άρα $|z|=1 \quad (6)$.
- Η ελάχιστη τιμή του $|w|$ είναι ίση με 3 και η μέγιστη τιμή του $|w|$ είναι ίση με 2.

  Επομένως: $2 \le |w| \le 3 \quad (7)$.

Με τη βοήθεια της τριγωνικής ανισότητας, παίρνουμε:

✓ $|z-w| = |z+(-w)| \le |z| + |-w| \overset{(6)}{=} 1 + |w| \overset{(7)}{\le} 1+3 = 4$. Άρα, $|z-w| \le 4 \quad (8)$.

και

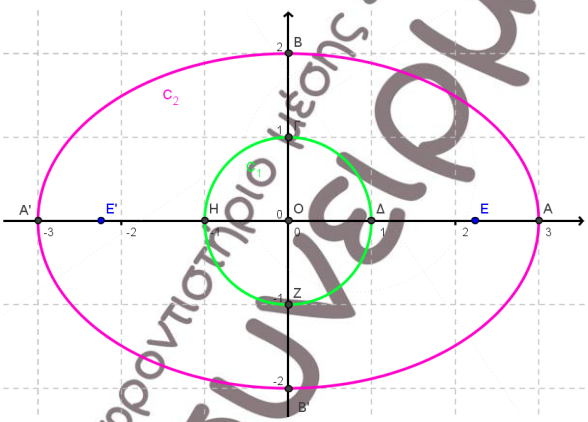
✓ $|z-w| = |z+(-w)| \ge \big||z| - |-w|\big| \overset{(6)}{=} \big|1-|w|\big| \overset{(7)}{\ge} |1-2| = |-1| = 1$. Άρα, $|z-w| \ge 1 \quad (9)$.

Από τις σχέσεις (8) και (9) προκύπτει:

$$1 \le |z-w| \le 4$$

β' τρόπος:

Κάνουμε το σχήμα:



Το μέτρο $|z-w|$ εκφράζει την απόσταση της εικόνας του μιγαδικού z (η οποία ανήκει στον κύκλο C_1) από την εικόνα του μιγαδικού w (η οποία ανήκει στην έλλειψη C_2). Τότε:

✓ $|z-w|_{\text{ελάχιστη}} = (\text{ΒΓ}) = (\text{ΖΒ}') = \beta - \rho = 2-1 = 1$, και

✓ $|z-w|_{\text{μέγιστη}} = (\text{ΑΗ}) = (\Delta\text{Α}') = \alpha + \rho = 3+1 = 4$

Επομένως, $1 \le |z-w| \le 4$.

Θέμα Γ

Γ1.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της $(0,+\infty)$ με:

$$f'(x) = \big((x-1)\ell nx - 1\big)'$$

$$f'(x) = (x-1)'\,\ell nx + (x-1)(\ell nx)' - (1)'$$

$$f'(x) = \ell nx + (x-1)\cdot\frac{1}{x} - 0$$

$$f'(x) = \ell nx + \frac{x-1}{x}$$, ή διαφορετικά $f'(x) = \dfrac{x\ell nx + x - 1}{x}$.

- Για $x \in (0,1) \Leftrightarrow 0 < x < 1$, έχουμε:
  - ✓ $\ell nx < 0$
  - ✓ $x - 1 < 0$
  - ✓ $x > 0$

  Άρα, $f'(x) = \underset{-}{\ell nx} + \overset{-}{\underset{+}{\frac{x-1}{x}}} < 0$

- Για $x = 1$, είναι:

  $f'(1) = \ell n1 + \frac{1-1}{1} = 0$

- Για $x \in (1,+\infty) \Leftrightarrow x > 1$, έχουμε:
  - ✓ $\ell nx > 0$
  - ✓ $x - 1 > 0$
  - ✓ $x > 0$

  Άρα, $f'(x) = \underset{+}{\ell nx} + \overset{+}{\underset{+}{\frac{x-1}{x}}} > 0$

Άρα, ο πίνακας μονοτονίας της f είναι:

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
$f'(x)$			$-$	0	$+$	
$f(x)$			$\searrow$		$\nearrow$	

Επομένως, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

Ακόμα, η συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x = 1$, το ελάχιστο $f(1) = (1-1)\ell n1 - 1 = -1$.

<u>Υπολογίζουμε τα όρια</u>:

$\lim\limits_{x \to 0^+}(x-1) = 0 - 1 = -1$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \ell nx = -\infty$ και $\lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1$, άρα:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+}\left((x-1)\ell nx - 1\right) \overset{(0-1)\cdot(-\infty)-1}{=} +\infty$$

$\lim\limits_{x \to +\infty}(x-1) = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ell nx = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1$, άρα:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left((x-1)\ell nx - 1\right) \overset{(+\infty)\cdot(+\infty)-1}{=} +\infty$$

<u>Για το σύνολο τιμών</u>:

- Στο διάστημα $\Delta_1 = (0,1]$:

  Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής ως πράξη μεταξύ συνεχών συναρτήσεων στο $\Delta_1 = (0,1]$, άρα το σύνολο τιμών της f στο Δ_1 είναι:

  $$f(\Delta_1) = \left[f(1), \lim_{x \to 0^+} f(x)\right) = [-1,+\infty)$$

- Στο διάστημα $\Delta_2=(1,+\infty)$:

  Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής ως πράξη μεταξύ συνεχών συναρτήσεων στο $\Delta_2=(1,+\infty)$, άρα το σύνολο τιμών της f στο Δ_2 είναι:

$$f(\Delta_2)=\left(\lim_{x\to 1^+} f(x),\lim_{x\to+\infty} f(x)\right)\underset{\text{άρα } \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)}{\overset{f \text{ συνεχής στο 1, επειδή } f \text{ παραγωγίσιμη στο 1}}{=}}\left(f(1),\lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-1,+\infty)$$

Επομένως, το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι:

$$f(D_f)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=[-1,+\infty)$$

Γ2.

Έχουμε:

$$x^{x-1}=e^{2013}\Leftrightarrow \ln x^{x-1}=\ln e^{2013}\Leftrightarrow (x-1)\ln x=2013\ln e\Leftrightarrow (x-1)\ln x=2013\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\ln x-1=2013-1\Leftrightarrow f(x)=2012$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=2012\quad(1)$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

- Στο διάστημα $\Delta_1=(0,1]$:

  $2012\in f(\Delta_1)=[-1,+\infty)$, άρα η εξίσωση $f(x)=2012$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα $x_1\in\Delta_1=(0,1]$, $(x_1$ θετική ρίζα$)$

  Επειδή $f\searrow\Delta_1=(0,1]$, άρα η εξίσωση $f(x)=2012$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $\Delta_1=(0,1]$.

  Επομένως, το x_1 είναι η μοναδική (θετική) ρίζα της εξίσωσης $f(x)=2012$, στο $\Delta_1=(0,1]$.

- Στο διάστημα $\Delta_2=(1,+\infty)$:

  $2012\in f(\Delta_2)=(-1,+\infty)$, άρα η εξίσωση $f(x)=2012$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα $x_2\in\Delta_2=(1,+\infty)$, $(x_2$ θετική ρίζα$)$

  Επειδή $f\nearrow\Delta_2=(1,+\infty)$, άρα η εξίσωση $f(x)=2012$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $\Delta_2=(1,+\infty)$.

  Επομένως, το x_2 είναι η μοναδική (θετική) ρίζα της εξίσωσης $f(x)=2012$, στο $\Delta_2=(1,+\infty)$.

Τελικά, η εξίσωση $f(x)=2012$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες x_1,x_2.

Γ3.

$$f'(x_0)+f(x_0)=2012\Leftrightarrow f'(x_0)+f(x_0)-2012=0$$

Επειδή x_1,x_2 $(x_1<x_2)$ είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=2012$, θα ισχύει:

$$f(x_1)=2012\quad(2)\quad\text{και}\quad f(x_2)=2012\quad(3).$$

<u>α' τρόπος</u>:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f'(x)+f(x)-2012$, $x>0$.

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]\subseteq(0,+\infty)$, ως πράξη μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Ακόμα:

$h(x_1)=f'(x_1)+f(x_1)-2012\overset{(2)}{=}f'(x_1)+2012-2012=f'(x_1)<0$, επειδή $x_1\in(0,1)$, όπου $f'(x)<0$ και

$h(x_2)=f'(x_2)+f(x_2)-2012\overset{(2)}{=}f'(x_2)+2012-2012=f'(x_2)>0$, επειδή $x_2\in\Delta_2=(1,+\infty)$, όπου $f'(x)>0$. Άρα:

- $h(x_1)\cdot h(x_2)<0$

Επομένως, ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano για τη συνάρτηση h στο διάστημα $[x_1,x_2]$. Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$h(x_0)=0\Leftrightarrow f'(x_0)+f(x_0)-2012=0\Leftrightarrow f'(x_0)+f(x_0)=2012$$

<u>β' τρόπος</u>:

$$f'(x)+f(x)-2012=0\overset{\cdot e^x}{\Leftrightarrow}f'(x)e^x+f(x)e^x-2012e^x=0\Leftrightarrow\left(e^xf(x)-2012e^x\right)'=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=e^xf(x)-2012e^x$, $x>0$.

- Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]\subseteq(0,+\infty)$, ως πράξη μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.
- Η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη στο $(x_1,x_2)\subseteq(0,+\infty)$ επειδή f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, με:

  $\varphi'(x)=\left(e^xf(x)-2012e^x\right)'=e^xf'(x)+e^xf(x)-2012e^x$

  Ακόμα:

  $\varphi(x_1)=e^{x_1}f(x_1)-2012e^{x_1}\overset{(2)}{=}2012e^{x_1}-2012e^{x_1}=0$ και

  $\varphi(x_2)=e^{x_2}f(x_2)-2012e^{x_2}\overset{(3)}{=}2012e^{x_2}-2012e^{x_2}=0$. Άρα:

- $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)$

Επομένως, ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση φ στο διάστημα $[x_1,x_2]$. Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$\varphi'(x_0)=0\Leftrightarrow e^{x_0}f'(x_0)+e^{x_0}f(x_0)-2012e^{x_0}=0\overset{:e^{x_0}\neq0}{\Leftrightarrow}f'(x_0)+f(x_0)-2012=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)+f(x_0)=2012$$

Γ4.

Έχουμε:

$g(x)=f(x)+1=(x-1)\ln x+1-1=(x-1)\ln x$, $x>0$.

Λύνουμε την εξίσωση:

$g(x)=0\Leftrightarrow(x-1)\ln x=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-1=0$ ή $\ln x=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=1$ ή $x=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=1$

Ο πίνακας προσήμων της συνάρτησης g είναι:

x	$-\infty$	0		1	e	$+\infty$
$x-1$			$-$	0		$+$
ℓnx			$-$	0		$+$
$g(x)$			$+$	0		$+$

Άρα, το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\mathrm{E}=\int_1^e |g(x)|\,dx \underset{|g(x)|=g(x)}{\overset{g(x)>0}{=}} \int_1^e g(x)\,dx=\int_1^e (x-1)\,\ell nx\,dx=\underbrace{\int_1^e x\ell nx\,dx}_{I_1}-\underbrace{\int_1^e \ell nx\,dx}_{I_2}$$

$$I_1=\int_1^e x\ell nx\,dx=\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ell nx\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\ell nx\right]_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}(\ell nx)'\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\ell nx\right]_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx=$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\ell nx\right]_1^e-\int_1^e\frac{x}{2}\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\ell nx\right]_1^e-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e=\left[\frac{x^2}{2}\ell nx-\frac{x^2}{4}\right]_1^e=\left[\frac{2x^2\ell nx-x^2}{4}\right]_1^e=$$

$$=\frac{2e^2\ell ne-e^2}{4}-\frac{2\cdot 1^2\ell n1-1^2}{4}=\frac{e^2}{4}+\frac{1^2}{4}=\frac{e^2+1}{4}$$

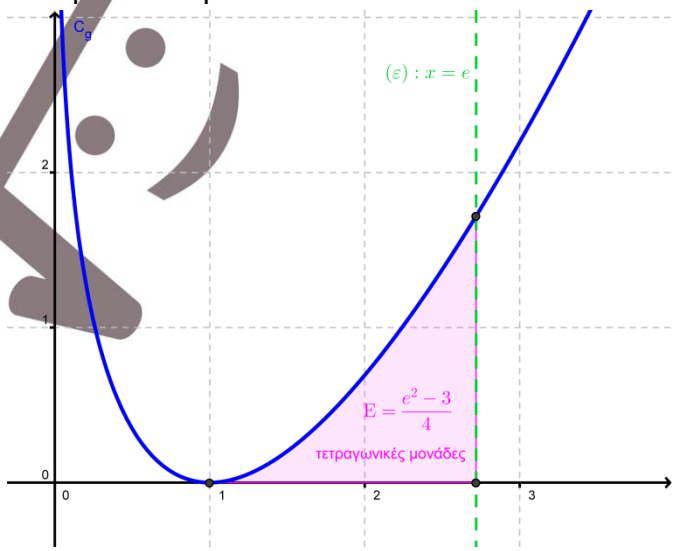
$$I_2=\int_1^e \ell nx\,dx=\int_1^e (x)'\,\ell nx\,dx=[x\ell nx]_1^e-\int_1^e x(\ell nx)'\,dx=[x\ell nx]_1^e-\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}\,dx=$$

$$=[x\ell nx]_1^e-\int_1^e 1\,dx=[x\ell nx]_1^e-[x]_1^e=[x\ell nx-x]_1^e=$$

$$=(e\ell ne-e)-(1\ell n1-1)=(e-e)-(0-1)=1$$

Άρα:

$$\mathrm{E}=I_1-I_2=\frac{e^2+1}{4}-1=\frac{e^2+1-4}{4}=\frac{e^2-3}{4}$$ τετραγωνικές μονάδες.



Σημείωση:
Η γραφική παράσταση δεν απαιτείται από τους υποψηφίους.

Θέμα Δ

Αρχικά, λόγω της γνωστής ανισότητας (εφαρμογή 2, σελίδα 266 του σχολικού βιβλίου) ισχύει:

$\ell nx \le x-1$, για κάθε $x>0$

Επομένως, $\ell nx \le x-1 \Leftrightarrow \ell nx - x \le -1$, για κάθε $x>0$

Άρα και $\ell nx - x < 0$, για κάθε $x>0$ $\quad (1)$

Ακόμα, έχουμε:

$$\int_1^{x^2-x+1} f(t)\,dt \ge \frac{x^2-x}{e} \Leftrightarrow \int_1^{x^2-x+1} f(t)\,dt - \frac{x^2-x}{e} \ge 0, \text{ για κάθε } x>0 \quad (2).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \int_1^{x^2-x+1} f(t)\,dt - \frac{x^2-x}{e}$, $x>0$.

Επειδή η συνάρτηση $f(t)$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, η συνάρτηση $\int_1^{x^2-x+1} f(t)\,dt$ θα είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $\left(\int_1^{x^2-x+1} f(t)\,dt\right)' = f\left(x^2-x+1\right)\cdot\left(x^2-x+1\right)' = f\left(x^2-x+1\right)\cdot(2x-1)$, $x>0$.

Επομένως, η συνάρτηση $g(x) = \int_1^{x^2-x+1} f(t)\,dt - \frac{x^2-x}{e}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, με:

$$g'(x) = \left(\int_1^{x^2-x+1} f(t)\,dt - \frac{x^2-x}{e}\right)' = f\left(x^2-x+1\right)\cdot(2x-1) - \frac{1-2x}{e}$$

Ακόμα, παρατηρούμε ότι:

$$g(1) = \int_1^{1^2-1+1} f(t)\,dt - \frac{1^2-1}{e} = \int_1^1 f(t)\,dt - \frac{0}{e} = 0 - \frac{1-1}{e} = 0.$$

Τότε, $(2) \Leftrightarrow g(x) \ge g(1)$. Άρα, η συνάρτηση g παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 = 1$.

Έχουμε:

- Η συνάρτηση g παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 = 1$
- Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$
- Το $x_0 = 1$ είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού $D_g = (0,+\infty)$ της g.

Επομένως, ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Fermat για τη συνάρτηση g. Άρα:

$$g'(1) = 0$$

$$f\left(1^2-1+1\right)\cdot(2\cdot 1-1) - \frac{1-2\cdot 1}{e} = 0$$

$$f(1)\cdot 1 - \frac{1}{e} = 0$$

$$f(1) = -\frac{1}{e} \quad (3)$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, και επειδή $f(x) \ne 0$ για κάθε $x>0$, η f θα διατηρεί πρόσημο στο $(0,+\infty)$. Δηλαδή θα ισχύει:

$f(x) > 0$, για κάθε $x>0$ ή $f(x) < 0$ για κάθε $x>0$

Όμως, $f(1)=-\frac{1}{e}<0$, άρα:

$$f(x)<0, \text{ για κάθε } x>0 \quad (4)$$

Δ1.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\int_1^x \frac{\ell nt-t}{f(t)}dt$, $x>0$.

Η συνάρτηση $\frac{\ell nt-t}{f(t)}$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πράξη μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Άρα, η συνάρτηση $h(x)=\int_1^x \frac{\ell nt-t}{f(t)}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, με:

$$h'(x)=\left(\int_1^x \frac{\ell nt-t}{f(t)}dt\right)'=\frac{\ell nx-x}{f(x)} \quad (5)$$

Ακόμα, $h(1)=\int_1^1 \frac{\ell nt-t}{f(t)}dt=0$

Έχουμε:

$$\ell nx-x=-\left(\int_1^x \frac{\ell nt-t}{f(t)}dt+e\right)\cdot|f(x)| \quad (6)$$

Επειδή $f(x)<0$ για κάθε $x>0$, θα ισχύει $|f(x)|=-f(x)$. Άρα:

$$(6)\Leftrightarrow \ell nx-x=-\left(\int_1^x \frac{\ell nt-t}{f(t)}dt+e\right)\cdot(-f(x))\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ell nx-x=f(x)\left(\int_1^x \frac{\ell nt-t}{f(t)}dt+e\right), \text{ για κάθε } x>0 \quad (7) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ell nx-x=f(x)(h(x)+e), \text{ για κάθε } x>0 \quad (8)$$

Για $t>0$ έχουμε:

- $(1)\Leftrightarrow \ell nt-t<0$ και
- $f(t)<0$

Άρα, $\frac{\ell nt-t}{f(t)}>0$.

Δηλαδή, η για τη συνάρτηση $k(x)=\frac{\ell nt-t}{f(t)}$ ισχύει ότι $k(x)=\frac{\ell nt-t}{f(t)}\geq 0$ και η $k(x)$ δεν είναι παντού ίση με το 0.

Επομένως, για $x>0$ και $t\in[1,x]$, ισχύει:

$$\int_1^x \frac{\ell nt-t}{f(t)}dt>0$$

Άρα, $\int_1^x \frac{\ell nt-t}{f(t)}dt+e>0\Leftrightarrow h(x)+e>0 \quad (9)$

Άρα, ισχύει:

$(8) \Leftrightarrow \ell nx - x = f(x)\big(h(x)+e\big)$, για κάθε $x>0$

$\overset{f(x)<0}{\Leftrightarrow} h(x)+e = \dfrac{\ell nx - x}{f(x)}$, για κάθε $x>0$ $\quad (10)$

$\overset{(9)}{\Leftrightarrow} f(x) = \dfrac{\ell nx - x}{h(x)+e}$, για κάθε $x>0$ $\quad (11)$

Άρα, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο των παραγωγίσιμων στο $(0,+\infty)$ συναρτήσεων $\ell nx - x$ και $h(x)+e$.

<u>α' τρόπος</u>:

Παραγωγίζουμε τη σχέση (8) και προκύπτει:

$$(\ell nx - x)' = \big(f(x)\big(h(x)+e\big)\big)'$$

$$\frac{1}{x} - 1 = f'(x)\big(h(x)+e\big) + f(x)h'(x)$$ και λόγω των σχέσεων (5) και (10) προκύπτει

$$\frac{1}{x} - 1 = f'(x)\frac{\ell nx - x}{f(x)} + f(x)\frac{\ell nx - x}{f(x)}$$

$$\frac{1}{x} - 1 = \frac{f'(x)(\ell nx - x)}{f(x)} + (\ell nx - x)$$

$$\frac{1}{x} - 1 = (\ell nx - x)\left(\frac{f'(x)}{f(x)} + 1\right).$$

Επειδή ισχύει $\ell nx - x < 0$, για κάθε $x>0$, έχουμε:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} + 1 = \frac{\frac{1}{x} - 1}{\ell nx - x}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} + 1 = \frac{(\ell nx - x)'}{\ell nx - x}$$

$$\big(\ell n|f(x)| + x\big)' = \big(\ell n|\ell nx - x|\big)'$$

Επομένως, υπάρχει σταθερός αριθμός $c \in \mathbb{R}$, ώστε:

$\ell n|f(x)| + x = \ell n|\ell nx - x| + c$, για κάθε $x>0$ και επειδή $f(x)<0$ και $\ell nx - x < 0$

ισχύει $\ell n\big(-f(x)\big) + x = \ell n(x - \ell nx) + c$, για κάθε $x>0$ $\quad (12)$

Για $x=1$, η σχέση (13) δίνει:

$$\ell n\big(-f(1)\big) + 1 = \ell n(1 - \ell n1) + c$$

$$\ell n\frac{1}{e} + 1 = \ell n1 + c$$

$$\ell n1 - \ell ne + 1 = \ell n1 + c$$

$$0 - 1 + 1 = 0 + c$$

$$c = 0$$

Άρα: $\ell n\left(-f\left(x\right)\right)+x=\ell n\left(x-\ell nx\right)$, για κάθε $x>0$

$$e^{\ell n\left(-f\left(x\right)\right)+x}=e^{\ell n\left(x-\ell nx\right)}, \text{ για κάθε } x>0$$

$$e^{\ell n\left(-f\left(x\right)\right)}\cdot e^{x}=e^{\ell n\left(x-\ell nx\right)}, \text{ για κάθε } x>0$$

$$-f\left(x\right)\cdot e^{x}=x-\ell nx, \text{ για κάθε } x>0$$

$$f\left(x\right)=\frac{x-\ell nx}{-e^{x}}, \text{ για κάθε } x>0$$

$$f\left(x\right)=e^{-x}\left(\ell nx-x\right), \text{ για κάθε } x>0$$

<u>β' τρόπος</u>:

Για κάθε $x\in\left(0,+\infty\right)$:

$$\left(8\right)\Leftrightarrow \ell nx-x=f\left(x\right)\left(h\left(x\right)+e\right)\overset{f(x)<0}{\Leftrightarrow}\frac{\ell nx-x}{f\left(x\right)}=h\left(x\right)+e\overset{(5)}{\Leftrightarrow}h'\left(x\right)=h\left(x\right)+e\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h'\left(x\right)-h\left(x\right)=e\overset{\cdot e^{-x}}{\Leftrightarrow}e^{-x}\cdot h'\left(x\right)-e^{-x}\cdot h\left(x\right)=e\cdot e^{-x}\Leftrightarrow e^{-x}\cdot h'\left(x\right)-e^{-x}\cdot h\left(x\right)=e^{1-x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(e^{-x}\cdot h\left(x\right)\right)'=\left(-e^{1-x}\right)'$$

Επομένως, υπάρχει σταθερός αριθμός $c\in\mathbb{R}$, ώστε:

$$e^{-x}\cdot h\left(x\right)=-e^{1-x}+c, \text{ για κάθε } x>0 \quad \left(13\right)$$

Για $x=1$, η σχέση $\left(13\right)$ δίνει:

$$e^{-1}\cdot h\left(1\right)=-e^{1-1}+c$$

$$\frac{1}{e}\cdot 0=-e^{0}+c$$

$$c=1$$

Άρα: $e^{-x}\cdot h\left(x\right)=-e^{1-x}+1$, για κάθε $x>0$

$$h\left(x\right)=\frac{e^{1}\cdot e^{-x}+1}{e^{-x}}, \text{ για κάθε } x>0$$

$$h\left(x\right)=e+\frac{1}{e^{-x}}, \text{ για κάθε } x>0$$

$$h\left(x\right)=e+e^{x}, \text{ για κάθε } x>0$$

$$\int_{1}^{x}\frac{\ell nt-t}{t}dt=e+e^{x}, \text{ για κάθε } x>0 \quad \left(14\right)$$

Παραγωγίζουμε τη σχέση $\left(14\right)$ και προκύπτει:

$$\left(\int_{1}^{x}\frac{\ell nt-t}{f\left(t\right)}dt\right)'=\left(e+e^{x}\right)', \text{ για κάθε } x>0$$

$$\frac{\ell nx-x}{f\left(x\right)}=e^{x}, \text{ για κάθε } x>0$$

$$f\left(x\right)=\frac{\ell nx-x}{e^{x}}, \text{ για κάθε } x>0$$

$$f\left(x\right)=e^{-x}\left(\ell nx-x\right), \text{ για κάθε } x>0$$

γ' τρόπος:

Από τη σχέση (10) παίρνουμε:

$$(10) \Leftrightarrow h(x)+e=\frac{\ell nx-x}{f(x)}, \text{ για κάθε } x>0$$

$$\int_1^x \frac{\ell nt-t}{f(t)}dt+e=\frac{\ell nx-x}{f(x)}, \text{ για κάθε } x>0$$

$$\int_1^x \frac{\ell nt-t}{f(t)}dt+e=\left(\int_1^x \frac{\ell nt-t}{f(t)}dt+e\right)', \text{ για κάθε } x>0$$

Λόγω του συμπεράσματος $f'(x)=f(x) \Leftrightarrow f(x)=ce^x$ (εφαρμογή – σελίδα 352 του σχολικού βιβλίου), προκύπτει ότι υπάρχει σταθερός αριθμός $c\in\mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε:

$$\int_1^x \frac{\ell nt-t}{f(t)}dt+e=c\cdot e^x, \text{ για κάθε } x>0$$

Για $x=1$, παίρνουμε:

$$\int_1^1 \frac{\ell nt-t}{f(t)}dt+e=c\cdot e^1$$

$$0+e=c\cdot e$$

$$c=1$$

Άρα, ισχύει:

$$\int_1^x \frac{\ell nt-t}{f(t)}dt+e=e^x, \text{ για κάθε } x>0$$

Παραγωγίζουμε την παραπάνω σχέση (η συνάρτηση $h(x)=\int_1^x \frac{\ell nt-t}{f(t)}dt$ είναι παραγωγίσιμη) και έχουμε:

$$\left(\int_1^x \frac{\ell nt-t}{f(t)}dt+e\right)'=\left(e^x\right)', \text{ για κάθε } x>0$$

$$\frac{\ell nx-x}{f(x)}=e^x, \text{ για κάθε } x>0$$

$$f(x)=\frac{\ell nx-x}{e^x}, \text{ για κάθε } x>0$$

φροντιστήριο μέσης εκπαίδευσης συνειρμός

Δ2.

Αρχικά, έχουμε:

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, άρα

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x - x}{e^x} \overset{\frac{(-\infty)-0}{1}}{=} -\infty \text{ και γι' αυτό } \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{f(x)} \overset{\frac{1}{-\infty}}{=} 0.$$

Θέτουμε $\dfrac{1}{f(x)} = y \overset{f(x)<0}{\Leftrightarrow} f(x) = \dfrac{1}{y}$ και παίρνουμε:

$$L = \lim_{x\to 0^+}\left[\left(f(x)\right)^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{f(x)} - f(x)\right] \underset{y=\frac{1}{f(x)}\to 0^-}{\overset{x\to 0^+}{=}}$$

$$= \lim_{y\to 0^-}\left(\frac{1}{y^2}\cdot \eta\mu y - \frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to 0^-} \frac{\eta\mu y - y}{y^2} \underset{\text{de l'Hospital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$= \lim_{y\to 0^-} \frac{(\eta\mu y - y)'}{(y^2)'} = \lim_{y\to 0^-} \frac{\sigma\upsilon\nu y - 1}{2y} \underset{\text{de l'Hospital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$= \lim_{y\to 0^-} \frac{(\sigma\upsilon\nu y - 1)'}{(2y)'} = \lim_{y\to 0^-} \frac{-\eta\mu y}{2} = \frac{-0}{2} = 0$$

Δ3.

Είναι $\ln x \le x - 1 \Leftrightarrow x - \ln x - 1 \ge 0$, για κάθε $x > 0$

Η συνάρτηση $f(t)$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, άρα η συνάρτηση $F(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, με:

$$F'(x) = \left(\int_\alpha^x f(t)\,dt\right)' = f(x), \text{ για κάθε } x > 0.$$

Η συνάρτηση $F'(x) = f(x) = \dfrac{\ln x - x}{e^x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, με:

$$F''(x) = \left(\frac{\ln x - x}{e^x}\right)' = \frac{(\ln x - x)'\cdot e^x - (\ln x - x)\cdot (e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{\left(\frac{1}{x} - 1\right)\cdot e^x - (\ln x - x)\cdot e^x}{(e^x)^2} =$$

$$= \frac{e^x\left(\frac{1}{x} - 1 - \ln x + x\right)}{(e^x)^2} = \frac{\frac{1}{x} - 1 - \ln x + x}{e^x} = \frac{\overset{+}{\frac{1}{x}} + \overbrace{(x - \ln x - 1)}^{+}}{\underset{+}{e^x}} > 0, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Επομένως, η συνάρτηση F είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

Άρα, η συνάρτηση F' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Έστω $x_0 > 0$ τυχαίο. Έχουμε:

$x_0 > 0 \overset{+x_0}{\Leftrightarrow} 2x_0 > x_0$ άρα και

$$2x_0 > x_0 \overset{+x_0}{\Leftrightarrow} 3x_0 > 2x_0$$

Θεωρούμε τα διαστήματα $\Delta_1 = [x_0, 2x_0]$ και $\Delta_2 = [2x_0, 3x_0]$.

- Η συνάρτηση F είναι συνεχής στο $\Delta_1 = [x_0, 2x_0] \subseteq (0, +\infty)$ ως παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$
- Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο $\Delta_1 = [x_0, 2x_0] \subseteq (0, +\infty)$

Επομένως, ισχύουν οι προϋποθέσεις του **Θ**εωρήματος **Μ**έσης **Τ**ιμής για τη συνάρτηση F στο διάστημα $\Delta_1 = [x_0, 2x_0]$.

Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (x_0, 2x_0)$ τέτοιο, ώστε:

$$F'(\xi_1) = \frac{F(2x_0) - F(x_0)}{2x_0 - x_0} \Leftrightarrow F'(\xi_1) = \frac{F(2x_0) - F(x_0)}{x_0} \quad (15)$$

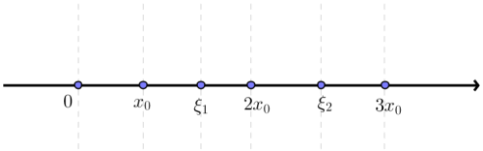
- Η συνάρτηση F είναι συνεχής στο $\Delta_2 = [2x_0, 3x_0] \subseteq (0, +\infty)$ ως παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$
- Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο $\Delta_2 = [2x_0, 3x_0] \subseteq (0, +\infty)$

Επομένως, ισχύουν οι προϋποθέσεις του **Θ**εωρήματος **Μ**έσης **Τ**ιμής για τη συνάρτηση F στο διάστημα $\Delta_2 = [2x_0, 3x_0]$.

Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (2x_0, 3x_0)$ τέτοιο, ώστε:

$$F'(\xi_2) = \frac{F(3x_0) - F(2x_0)}{3x_0 - 2x_0} \Leftrightarrow F'(\xi_2) = \frac{F(3x_0) - F(2x_0)}{x_0} \quad (16)$$

Είναι $\xi_1 \in (x_0, 2x_0)$, $\xi_2 \in (2x_0, 3x_0)$ και $0 < x_0 < 2x_0 < 3x_0$,



άρα $\xi_1 < \xi_2 \overset{F' \nearrow (0,+\infty)}{\Leftrightarrow} F'(\xi_1) < F'(\xi_2) \underset{(16)}{\overset{(15)}{\Leftrightarrow}}$

$$\Leftrightarrow \frac{F(2x_0) - F(x_0)}{x_0} < \frac{F(3x_0) - F(2_0)}{x_0} \overset{x_0 > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow F(2x_0) - F(x_0) < F(3x_0) - F(2x_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F(x_0) + F(3x_0) > 2F(2x_0)$$

Αποδείξαμε ότι για τυχαίο $x_0 > 0$ ισχύει $F(x_0) + F(3x_0) > 2F(2x_0)$.

Επομένως, για κάθε $x > 0$ ισχύει $F(x) + F(3x) > 2F(2x)$.

Δ4.

Έχουμε:

$F(\beta) + F(3\beta) = 2F(\xi) \Leftrightarrow 2F(\xi) - F(\beta) - F(3\beta) = 0$.

Είναι $F'(x) = f(x) = \underset{+}{e^{-x}} \underbrace{(\ell nx - x)}_{-} < 0$ (είναι $\ell nx - x < 0$, για κάθε $x > 0$, λόγω της (1))

Άρα, $F \searrow (0, +\infty)$.

Ακόμα, επειδή $\beta > 0$, ισχύουν:

$$\beta > 0 \overset{+\beta}{\Leftrightarrow} 2\beta > \beta \quad \text{και}$$

$$2\beta > \beta \overset{+\beta}{\Leftrightarrow} 3\beta > 2\beta$$

Άρα, $3\beta > \beta \overset{F\searrow}{\Leftrightarrow} F(3\beta) < F(\beta) \Leftrightarrow F(\beta) - F(3\beta) > 0 \quad (17)$.

Από το ερώτημα **(Δ3)**, προκύπτει ότι:

για κάθε $x > 0$ ισχύει $\quad F(x) + F(3x) > 2F(2x)$

Επομένως $\quad F(\beta) + F(3\beta) > 2F(2\beta) \Leftrightarrow 2F(2\beta) - F(\beta) - F(3\beta) < 0 \quad (18)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$G(x) = 2F(x) - F(\beta) - F(3\beta),\ x > 0$.

Είναι:

$G(\beta) = 2F(\beta) - F(\beta) - F(3\beta) = F(\beta) - F(3\beta) > 0$ (λόγω της (17))

$G(2\beta) = 2F(2\beta) - F(\beta) - F(3\beta) < 0$ (λόγω της (18))

- Η συνάρτηση G είναι συνεχής στο $[\beta, 2\beta] \subseteq (0, +\infty)$, ως πράξη μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.
- $G(\beta) \cdot G(2\beta) < 0$

Επομένως, ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano για τη συνάρτηση G στο διάστημα $[\beta, 2\beta]$. Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\beta, 2\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$G(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2F(\xi) - F(\beta) - F(3\beta) = 0 \Leftrightarrow F(\beta) + F(3\beta) = 2F(\xi)$$

Επιπλέον, η συνάρτηση $G(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, με:

$$G'(x) = \left(2F(x) - F(\beta) - F(3\beta)\right)' = 2F'(x) = 2f(x) = 2\underset{+}{e^{-x}}\underbrace{(\ell nx - x)}_{-} < 0$$

επειδή είναι $\ell nx - x < 0$, για κάθε $x > 0$, λόγω της (1).

Επομένως, η συνάρτηση G είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$, άρα η εξίσωση $G(x) = 0$ θα έχει το πολύ μια ρίζα. Άρα, το $\xi \in (\beta, 2\beta)$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $G(x) = 0$.

Δηλαδή, υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\beta, 2\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$G(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2F(\xi) - F(\beta) - F(3\beta) = 0 \Leftrightarrow F(\beta) + F(3\beta) = 2F(\xi)$$

φροντιστήριο μέσης εκπαίδευσης συνειρμός