# Θέμα Α

**Α1**. Θεωρία (απόδειξη), σελίδα 31 σχολικού βιβλίου

**Α2**. Θεωρία (ορισμός), σελίδα 148-149 σχολικού βιβλίου

**Α3**. Θεωρία, (ορισμός), σελίδα 96 σχολικού βιβλίου

**Α4**.

| | |
|---|---|
| α) | Λάθος |
| β) | Σωστό |
| γ) | Λάθος |
| δ) | Σωστό |
| ε) | Σωστό |

# Θέμα Β

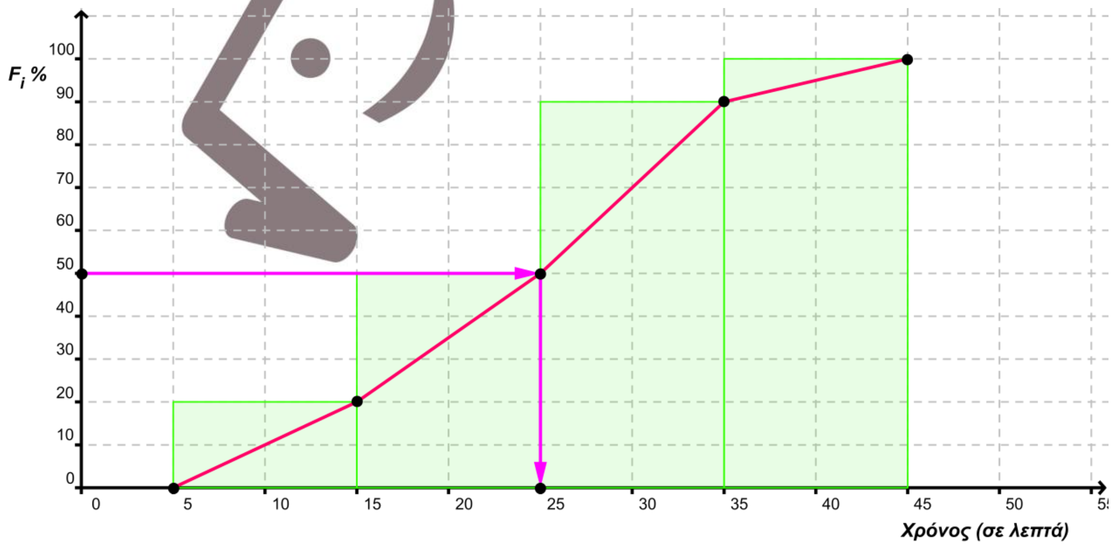
**Β1**.

Α' τρόπος

Η αθροιστική σχετική συχνότητα τοις εκατό που αντιστοιχεί στην κλάση $[15,25)$ είναι $F_2\%=50$, άρα το $50\%$ των παρατηρήσεων (χρόνων) είναι μικρότερες ή ίσες των 25 λεπτών και το $50\%$ των παρατηρήσεων (χρόνων) είναι μεγαλύτερες ή ίσες των 25 λεπτών. Επομένως η διάμεσος είναι $\delta=25$ λεπτά.

Β' τρόπος

Στο ιστόγραμμα $F_i\%$ σχεδιάζουμε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων τοις εκατό και προκύπτει:




Επομένως, $\delta=25$ λεπτά

**Β2**.

Επειδή η διάμεσος είναι $\delta = 25$ λεπτά, θα πρέπει οι μισές σε πλήθος παρατηρήσεις να είναι μικρότερες ή ίσες των 25 λεπτών και οι μισές σε πλήθος παρατηρήσεις να είναι μεγαλύτερες ή ίσες των 25 λεπτών.

Επομένως, οι μισές σε πλήθος παρατηρήσεις ανήκουν στις πρώτες δύο κλάσεις $[5,15)$ και $[15,25)$, άρα είναι σε πλήθος $\nu_1 + \nu_2 = \alpha + 4 + 3\alpha - 6 = 4\alpha - 2$ και οι μισές σε πλήθος παρατηρήσεις ανήκουν στις τελευταίες δύο κλάσεις $[25,35)$ και $[35,45)$, άρα είναι σε πλήθος $\nu_3 + \nu_4 = 2\alpha + 8 + \alpha - 2 = 3\alpha + 6$.

Επομένως, $4\alpha - 2 = 3\alpha + 6 \Leftrightarrow \alpha = 8$

Τότε, ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων είναι:

| **Χρόνοι (λεπτά)** | $x_i$ | $\nu_i$ | $f_i\%$ | $N_i$ | $F_i\%$ | $x_i\nu_i$ | $x_i - \bar{x}$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | $(x_i - \bar{x})^2 \cdot \nu_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $[5,15)$ | 10 | 12 | 20 | 12 | 20 | 120 | -14 | 196 | 2352 |
| $[15,25)$ | 20 | 18 | 30 | 30 | 50 | 360 | -4 | 16 | 288 |
| $[25,35)$ | 30 | 24 | 40 | 54 | 90 | 720 | 6 | 36 | 864 |
| $[35,45)$ | 40 | 6 | 10 | 60 | 100 | 240 | 16 | 256 | 1536 |
| Σύνολο | | 60 | 100 | | | 1440 | | | 5040 |

**Β3**.

Από τον παραπάνω πίνακα, έχουμε:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i \nu_i}{\nu} = \frac{1440}{60} = 24 \text{ λεπτά.}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{4} (x_i - \bar{x})^2 \cdot \nu_i}{\nu} = \frac{5040}{60} = 84 \text{, άρα}$$

$$s = \sqrt{84} \simeq 9{,}17 \text{ λεπτά}$$

**Β4**.

Οι ζητούμενες παρατηρήσεις (μαθητές) ανήκουν σε μέρος της 4ης κλάσης.

Θεωρούμε την υποθετική κλάση:

- $[37,45)$, με σχετική συχνότητα $f_4'\% = \lambda$ και πλάτος $c_4' = 45-37=8$

  Η οποία είναι μέρος της
- $[35,45)$, με σχετική συχνότητα $f_4\% = 10$ και πλάτος $c_4 = 45-35=10$

Επειδή δεχόμαστε ότι οι παρατηρήσεις κατανέμονται ομοιόμορφα μέσα στις κλάσεις, θα ισχύει:

$$\frac{f_4'\%}{f_4\%} = \frac{c_4'}{c_4} \Leftrightarrow \frac{\lambda}{10} = \frac{8}{10} \Leftrightarrow \lambda = 8$$

Άρα οι ζητούμενες παρατηρήσεις είναι σε ποσοστό $8\%$.

## <u>Θέμα Γ</u>

Αναφέρεται η έκφραση «επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή», επομένως ο δειγματικός χώρος αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα.

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

Α: «ο μαθητής που επιλέγεται μαθαίνει Γαλλικά»

Β: «ο μαθητής που επιλέγεται μαθαίνει Ιταλικά»

Τότε:

$$P(\mathrm{A}) = \frac{3\nu}{\nu^2+1} \quad \text{και} \quad P(\mathrm{B}) = \frac{\nu+2}{\nu^2+1}$$

Το ενδεχόμενο «ο μαθητής που επιλέγεται μαθαίνει και τις δύο γλώσσες» είναι το $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$.

Άρα $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = \dfrac{\nu+1}{\nu^2+1}$.

Το ενδεχόμενο «ο μαθητής που επιλέγεται μαθαίνει μια τουλάχιστον από τις δύο γλώσσες» είναι το $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$.

Άρα $P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}{x^2+x}$.

**Γ1**.

Έχουμε: $P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}{x^2+x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{x(x+1)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} =$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{2\left[\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2 - 2^2\right]}{x(x+1)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} = \lim_{x\to -1} \frac{2\left(x^2+3-4\right)}{x(x+1)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{2\left(x^2-1\right)}{x(x+1)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} = \lim_{x\to -1} \frac{2(x-1)(x+1)}{x(x+1)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{2(x-1)}{x\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} = \frac{2\cdot(-1-1)}{-1\cdot\left(\sqrt{(-1)^2+3}+2\right)} = \frac{-4}{-4} = 1$$

Άρα $P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=1$ και επειδή ο δειγματικός χώρος αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα θα είναι $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}=\Omega$, δηλαδή το $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$ είναι βέβαιο ενδεχόμενο.

**Γ2**.

Από τον προσθετικό νόμο παίρνουμε:

$$P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$$

$$1 = \frac{3\nu}{\nu^2+1} + \frac{\nu+2}{\nu^2+1} - \frac{\nu+1}{\nu^2+1}$$

$$1 = \frac{3\nu+\nu+2-\nu-1}{\nu^2+1}$$

$$1 = \frac{3\nu+1}{\nu^2+1}$$

$$\nu^2+1 = 3\nu+1$$

$$\nu^2 - 3\nu = 0$$

$$\nu\cdot(\nu-3) = 0$$

$$\nu = 0 \text{ ή } \nu = 3$$

Επειδή $\nu \ge 3$, θα είναι $\nu = 3$ (η λύση $\nu = 0$ απορρίπτεται)

**Γ3.**

Για $\nu = 3$, έχουμε:

$$P(\mathrm{A}) = \frac{3 \cdot 3}{3^2+1} = \frac{9}{10}, \quad P(\mathrm{B}) = \frac{3+2}{3^2+1} = \frac{5}{10} \quad \text{και} \quad P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{3+1}{3^2+1} = \frac{4}{10}$$

Το ενδεχόμενο «ο μαθητής που επιλέγεται μαθαίνει μόνο μια από τις δύο γλώσσες» είναι το $(\mathrm{A}-\mathrm{B}) \cup (\mathrm{B}-\mathrm{A})$.

Επειδή $(\mathrm{A}-\mathrm{B}) \cap (\mathrm{B}-\mathrm{A}) = \varnothing$ (δηλαδή τα δύο ενδεχόμενα $\mathrm{A}-\mathrm{B}$ και $\mathrm{B}-\mathrm{A}$ είναι ξένα), θα ισχύει ο απλός προσθετικός νόμος:

$$P\big((\mathrm{A}-\mathrm{B}) \cup (\mathrm{B}-\mathrm{A})\big) = P(\mathrm{A}-\mathrm{B}) + P(\mathrm{B}-\mathrm{A}) = P(\mathrm{A}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) =$$
$$= P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - 2P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{9}{10} + \frac{5}{10} - 2 \cdot \frac{4}{10} = \frac{6}{10}$$

**Γ4.**

Επειδή ο δειγματικός χώρος αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα θα χρησιμοποιήσουμε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας:

$$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{N(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{N(\Omega)} \Leftrightarrow \frac{4}{10} = \frac{32}{N(\Omega)} \Leftrightarrow 4N(\Omega) = 320 \Leftrightarrow N(\Omega) = 80 \ \text{μαθητές.}$$

# Θέμα Δ

**Δ1.**

Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1+\ell n^2 x}{x}$, $x > 0$ είναι παραγωγίσιμη με:

$$f'(x) = \frac{(1+\ell n^2 x)' \cdot x - (1+\ell n^2 x) \cdot (x)'}{x^2} = \frac{2\ell nx \cdot \frac{1}{x} \cdot x - (1+\ell n^2 x) \cdot 1}{x^2} = -\frac{\ell n^2 x - 2\ell nx + 1}{x^2} =$$
$$= -\left(\frac{\ell nx - 1}{x}\right)^2 \leq 0 \ \text{για κάθε} \ x > 0.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\left(\frac{\ell nx - 1}{x}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \ell nx - 1 = 0 \Leftrightarrow \ell nx = 1 \Leftrightarrow x = e$$

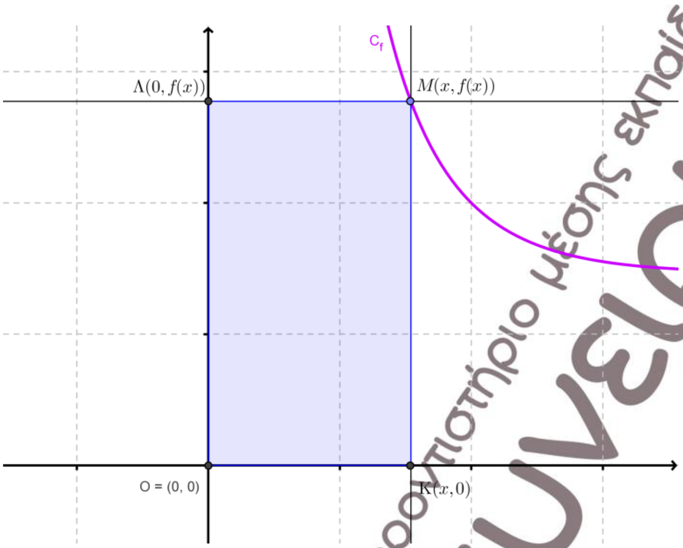
Άρα, ο πίνακας μονοτονίας της $f$ είναι:

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | | $e$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | ‖ | $-$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | | ‖ | $\searrow$ | | $\searrow$ |

Επομένως, η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

**Δ2.**

Κάνουμε το σχήμα:




$$(\mathrm{OK})=\sqrt{(x_{\mathrm{K}}-x_0)^2+(y_{\mathrm{K}}-y_0)^2}=\sqrt{(x-0)^2+(0-0)^2}=\sqrt{x^2}=|x|$$

Επειδή $x>0$, θα είναι $(\mathrm{OK})=x$

$$(\mathrm{O\Lambda})=\sqrt{(x_{\Lambda}-x_0)^2+(y_{\Lambda}-y_0)^2}=\sqrt{(0-0)^2+(f(x)-0)^2}=\sqrt{(f(x))^2}=|f(x)|$$

Επειδή $f(x)=\dfrac{1+\ell n^2 x}{x}>0$ για κάθε $x>0$, θα είναι $(\mathrm{O\Lambda})=f(x)$.

Το εμβαδόν του ορθογωνίου $\mathrm{OKM\Lambda}$ θα δίνεται από τη συνάρτηση:

$$\mathrm{E}(x)=(\beta\acute{\alpha}\sigma\eta)\cdot(\acute{\upsilon}\psi o\varsigma)=(\mathrm{OK})\cdot(\mathrm{O\Lambda})=x\cdot f(x)=x\cdot\frac{1+\ell n^2 x}{x}=1+\ell n^2 x,\ x>0$$

Η συνάρτηση $\mathrm{E}(x)$ είναι παραγωγίσιμη με :

$$\mathrm{E}'(x)=(1+\ell n^2 x)'=2\ell n x\cdot\frac{1}{x}=\frac{2\ell n x}{x},\ x>0$$

$$\mathrm{E}'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2\ell nx}{x}=0 \Leftrightarrow \ell nx=0 \Leftrightarrow \ell nx=\ell n1 \Leftrightarrow x=1$$

$$\mathrm{E}'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{2\ell nx}{x}>0 \Leftrightarrow \ell nx>0 \Leftrightarrow \ell nx>\ell n1 \Leftrightarrow x>1$$

$$\mathrm{E}'(x)<0 \Leftrightarrow \frac{2\ell nx}{x}<0 \Leftrightarrow \ell nx<0 \Leftrightarrow \ell nx<\ell n1 \Leftrightarrow x<1$$

Άρα, ο πίνακας μονοτονίας της $\mathrm{E}$ είναι:

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{E}'(x)$ | | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\mathrm{E}(x)$ | | ‖ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

Επομένως, η $\mathrm{E}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

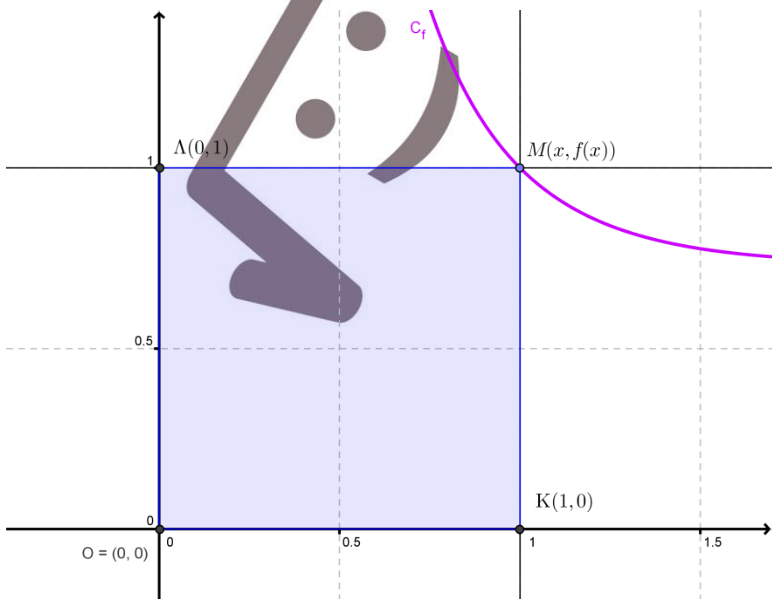
Ακόμα η συνάρτηση $\mathrm{E}$ παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x=1$, το ελάχιστο $\mathrm{E}(1)=1$ τετραγωνική μονάδα.

Άρα, το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο όταν:

$\beta\acute{\alpha}\sigma\eta=(\mathrm{OK})=x=1$ και $\mathrm{K}(1,0)$, ενώ

$\acute{\upsilon}\psi o\varsigma=(\mathrm{O}\Lambda)=f(1)=\dfrac{1+\ell n^2 1}{1}=1$ και $\Lambda(1,0)$

Τότε όμως το ορθογώνιο $\mathrm{OKM}\Lambda$ είναι τετράγωνο.



**Δ3.**

Έστω $(\eta): y=\lambda_\eta \cdot x+\beta_\eta$ η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης $C_f$ της συνάρτησης $f$ στο σημείο της $\Sigma(1, f(1))$.

Έχουμε:

$f(x)=\dfrac{1+\ell n^2 x}{x}$ άρα $f(1)=\dfrac{1+\ell n^2 1}{1}=1$ και

$f'(x)=-\left(\dfrac{\ell n x-1}{x}\right)^2$, άρα $f'(1)=-\left(\dfrac{\ell n 1-1}{x}\right)^2=-1$

Είναι $\lambda_\eta=f'(1)=-1$, άρα $(\eta): y=-1\cdot x+\beta_\eta$

Έχουμε $\varepsilon // \eta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=\lambda_\eta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=-1$.

Άρα $(\varepsilon): y=-x+\beta$

Τα σημεία $\mathrm{M}_i(x_i, y_i)\in\varepsilon: y=-x+\beta$, άρα:

$y_i=-x_i+\beta$, $i=1,2,\ldots,10$

Σύμφωνα με την εφαρμογή 3, σελίδα 99 του σχολικού βιβλίου, οι τεταγμένες $y_i$ των σημείων $\mathrm{M}_i$ θα έχουν:

Μέση τιμή: $\bar{y}=-1\cdot\bar{x}+\beta=-1\cdot 10+\beta=-10+\beta$

Τυπική απόκλιση: $s_y=|-1|\cdot s_x=1\cdot 2=2$

Συντελεστή μεταβλητότητας: $CV_y=\dfrac{s_y}{|\bar{y}|}=\dfrac{2}{|-10+\beta|}$

Για να είναι το δείγμα των παρατηρήσεων $y_i$ ομοιογενές, θα πρέπει:

$$CV_y\le 10\% \Leftrightarrow \frac{2}{|-10+\beta|}\le\frac{1}{10}\Leftrightarrow |-10+\beta|\ge 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -10+\beta\ge 20 \quad \text{ή} \quad -10+\beta\le -20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta\ge 30 \qquad \text{ή} \quad \beta\le -10$$

**Δ4**.

Επειδή $\mathrm{A} \neq \varnothing$ και $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \neq \varnothing$ και επειδή ο δειγματικός χώρος αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα θα είναι

$0 < P(\mathrm{A}) \leq 1$ και $0 < P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \leq 1$

Έχουμε:

$$\mathrm{A} \subseteq \mathrm{A} \cup \mathrm{B} \Rightarrow P(\mathrm{A}) \leq P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \overset{f \searrow (0,+\infty)}{\Rightarrow} f\left(P(\mathrm{A})\right) \geq f\left(P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})\right) \quad (1)$$

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \subseteq \mathrm{A} \cup \mathrm{B} \Rightarrow P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \leq P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \overset{f \searrow (0,+\infty)}{\Rightarrow} f\left(P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})\right) \geq f\left(P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})\right) \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις ανισότητες $(1)$ και $(2)$ κατά μέλη προκύπτει:

$$f\left(P(\mathrm{A})\right) + f\left(P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})\right) \geq 2f\left(P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})\right)$$