Θέμα Α

Α1. Θεωρία (ορισμός) – Σελίδα 84 του σχολικού βιβλίου
Εύρος είναι η διαφορά της μικρότερης τιμής από τη μεγαλύτερη.

Α2.

α)	Σωστό
β)	Σωστό
γ)	Λάθος
δ)	Λάθος
ε)	Σωστό

Α3.

α) $(\ell n x)' = \dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}}$, με $x > 0$

β) $(\eta\mu x)' = \boldsymbol{\sigma\upsilon\nu x}$

γ) Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \boldsymbol{0}$

Θέμα Β

Β1.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 4^-}(x^2 - 7x + 12) = 4^2 - 7\cdot 4 + 12 = 16 - 28 + 12 = 0$

και $\lim\limits_{x\to 4^-}(x-4) = 4 - 4 = 0$,

προκύπτει στο όριο $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$ η απροσδιόριστη μορφή $\dfrac{0}{0}$.

Για το $x^2 - 7x + 12$:

1	−7	12	4
	4	−12	
1	−3	0	

$\rho = 4$

$\delta(x) = x - 4$

$\pi(x) = 1\cdot x - 3$

$\pi(x) = x - 3$

Άρα:

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-}\frac{x^2 - 7x + 12}{x-4} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 4^-}\frac{(x-3)(x-4)}{x-4} = \lim_{x\to 4^-}\frac{x-3}{1} = \lim_{x\to 4^-}(x-3) = 4 - 3 = 1$$

Β2.

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+}\left(\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} - 3\right) = \lim_{x\to 4^+}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} - \lim_{x\to 4^+} 3 = \lim_{x\to 4^+}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} - 3 =$$

$$= \lim_{x\to 4^+}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - 3 = \lim_{x\to 4^+}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}^2 - 2^2} - 3 = \lim_{x\to 4^+}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} - 3 =$$

$$=\lim_{x\to 4^+}\frac{\left(\sqrt{x}+2\right)}{1}-3=\lim_{x\to 4^+}\left(\sqrt{x}+2\right)-3==\sqrt{4}+2-3=2+2-3=1$$

Β3.

Για να είναι η f συνεχής στο $x_0=4$ θα πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^+} f(x)=f(4)$$

Όμως, $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=1$ και $f(4)=\alpha$.

Άρα, πρέπει $\alpha=1$.

Θέμα Γ

Γ1.

Ηλικίες $[\ ,\ )$	Μέσο διαστήματος K_i	Συχνότητα v_i	$K_i\cdot v_i$	Αθροιστική συχνότητα N_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$
$[25,35)$	30	7	210	7	17,5
$[35,45)$	40	12	480	19	30
$[45,55)$	50	15	750	34	37,5
$[55,65)$	60	6	360	40	15
Σύνολα		40	1800		100

Γ2.

Η μέση τιμή δίνεται από τον τύπο $\bar{x}=\dfrac{\text{Άθροισμα } K_i\cdot v_i}{v}=\dfrac{1800}{40}=45$ έτη

Γ3.

Οι εργαζόμενοι που έχουν ηλικία τουλάχιστον 45 έτη ανήκουν στις κλάσεις $[45,55)$ και $[55,65)$, και είναι σε πλήθος $v_3+v_4=15+6=21$

Γ4.

Οι εργαζόμενοι που έχουν ηλικία κάτω των 35 ετών ανήκουν στην κλάση $[25,35)$ και είναι σε ποσοστό $f_1\%=17{,}5\%$

Θέμα Δ

Δ1.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f'(x)=\left(x^3-6x^2+9x+1\right)'$$

$$f'(x)=\left(x^3\right)'-6\cdot\left(x^2\right)'+9\cdot(x)'+(1)'$$

$$f'(x)=3x^2-6\cdot 2x+9\cdot 1+0$$

$$f'(x)=3x^2-12x+9$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-12x+9=0$$

$$\Delta=(-12)^2-4\cdot 3\cdot 9=144-108=36>0$$

$$x_{1,2}=\frac{-(-12)\pm\sqrt{36}}{2\cdot 3}=\frac{12\pm 6}{6}=\begin{cases}\dfrac{12-6}{6}=\dfrac{6}{6}=1\\[2mm]\dfrac{12+6}{6}=\dfrac{18}{6}=3\end{cases}$$

Ο πίνακας προσήμων της f' (και ο πίνακας μονοτονίας της f) έχει ως εξής:

x	$-\infty$ 1	1 3	3 $+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Άρα η f είναι:

- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,1]$,
- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,3]$ και
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3,+\infty)$

Δ2.

Η f παρουσιάζει:

- τοπικό μέγιστο στο $x_1=1$, το $f(1)=1^3-6\cdot 1^2+9\cdot 1+1=1-6+9+1=5$ και
- τοπικό ελάχιστο στο $x_2=3$, το $f(3)=3^3-6\cdot 3^2+9\cdot 3+1=27-54+27+1=1$

Δ3.

$$\int_1^3 f'(x)dx=\left[f(x)\right]_1^3=f(3)-f(1)=1-5=-4$$

Δ4.

Η συνάρτηση $g(x)=3x^2-12x+9$ είναι ίση με την $f'(x)$, επομένως ο πίνακας προσήμων της έχει ως εξής:

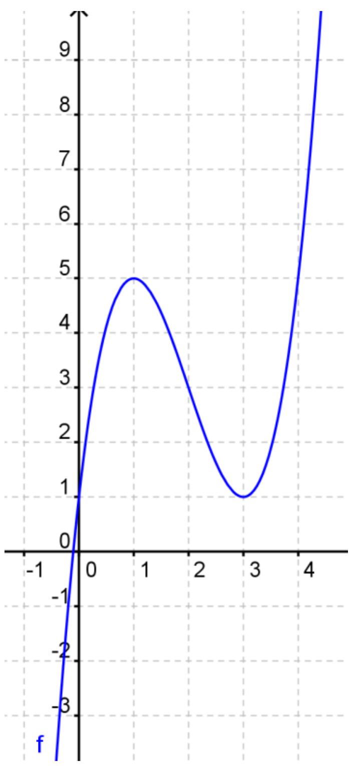
x	$-\infty$ 0 1	1 3	3 $+\infty$
$g(x)=f'(x)$	$+$	$-$	$+$

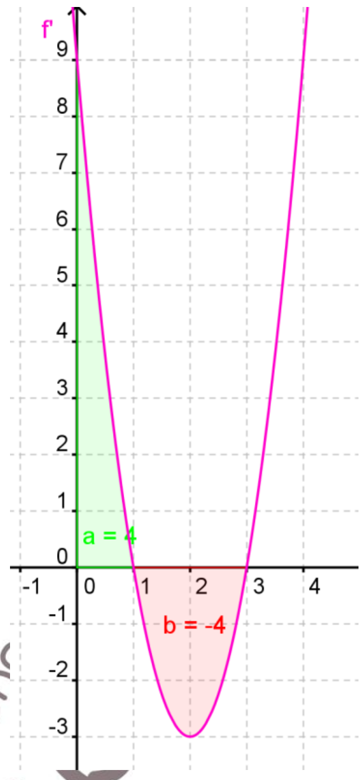
Επομένως το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου είναι:

$$E=\int_0^3|g(x)|dx=\int_0^3|f'(x)|dx=\int_0^1 f'(x)dx-\int_1^3 f'(x)dx=\left[f(x)\right]_0^1-\left[f(x)\right]_1^3=$$

$$=\left(f(1)-f(0)\right)-\left(f(3)-f(1)\right)=(5-1)-(1-5)=4-(-4)=4+4=8$$

τετραγωνικές μονάδες


f


f'
a = 4
b = -4