



2024 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' Γενικού Λυκείου

Θετικών Σπουδών / Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής

Σάββατο 27 Απριλίου 2024 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

- A1. Να αποδειχθεί ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο είναι συνεχής και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο x_0 και είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (α, β) .

Μονάδες 7

- A2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται κυρτή σε διάστημα Δ .

Μονάδες 3

- A3. Να διατυπώσετε και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το θεώρημα Rolle.

Μονάδες 5

- A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν για μια συνάρτηση f ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

Μονάδες 2



2024 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

β) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε σημείο $x_0 \neq 0$, τότε ισχύει $\lim_{h \rightarrow 1} f(x_0 \cdot h) = f(x_0)$.

Μονάδες 2

γ) Αν μια συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη σε σημείο x_0 , τότε δεν είναι ούτε συνεχής στο σημείο x_0 .

Μονάδες 2

δ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ και δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε δεν

υπάρχει ούτε το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Μονάδες 2

ε) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$, τότε η συνάρτηση f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) .

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε την συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} + 1, & x \geq 1 \\ -\sqrt[3]{1-x} + 1, & x < 1 \end{cases}$.

B1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1 και να βρείτε την αντίστροφη f^{-1} .

Μονάδες 4+4

Αν η συνάρτηση f^{-1} έχει τύπο $f^{-1}(x) = (x-1)^3 + 1, x \in \mathbb{R}$, τότε:

B2. Να βρείτε τις εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f^{-1} που είναι κάθετες προς την ευθεία $y = -\frac{1}{3}x + 1$.

Μονάδες 6



2024 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

B3. Να λύσετε την ανίσωση $f(e^{1-x}) < x$.

Μονάδες 5

B4. Να υπολογίσετε τα όρια: i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(f^{-1}(x))}{x}$ και ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f^{-1}(x) - f(x))$

Μονάδες 3+3

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε συνάρτηση g η οποία είναι ορισμένη και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, για την οποία ισχύουν $g(g'(x)) + g(x) = 0$, για κάθε $x > 0$ και $g(1) = 0$.

Γ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει $g'(g'(x)) = x$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 2+4

Γ2. Να δείξετε ότι $g'(1) = 1$ και ότι $g(x) = \ln x$, $x > 0$.

Μονάδες 2+4

Γ3. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(|x|) - g(|\eta\mu x|)}{|x| - |\eta\mu x|}$.

Μονάδες 6

Γ4. Αν $f(x) = -\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, τότε να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη.

Μονάδες 7



ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\rightarrow(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει $\int_0^1 \ln^2 f(x) dx + \frac{1}{2} = \int_0^1 \sqrt{x} \cdot \ln f^2(x) dx$.

Δ1. Να δείξετε ότι ισχύει $f(x) = e^{\sqrt{x}}$, για κάθε $x \in [0,1]$.

Μονάδες 6

Αν η συνάρτηση f έχει τύπο $f(x) = e^{\sqrt{x}}$, $x \geq 0$, τότε:

Δ2. Να δείξετε ότι το σημείο $A(1,e)$ είναι σημείο καμπής της συνάρτησης f και να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A .

Μονάδες 2+2

Δ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη (ε) στο σημείο A , τον άξονα $x\chi'$ και τον άξονα $y\gamma'$.

Μονάδες 5

Δ4. Θεωρούμε ένα σημείο $M(x(t), y(t))$, $t \geq 0$ το οποίο κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της f και η τετμημένη του αυξάνεται με σταθερό ρυθμό. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο M τέμνει τον άξονα $x\chi'$ στο σημείο N , τότε να βρείτε την ταχύτητα του σημείου N τη χρονική στιγμή που το σημείο M διέρχεται από το σημείο A .

Μονάδες 5

Δ5. Να αποδείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\alpha+1} f\left(\frac{1}{x}\right) dx > \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\alpha+2} f\left(\frac{1}{x}\right) dx$, για κάθε $\alpha > 0$.

Μονάδες 5