



2024 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' Γενικού Λυκείου

Θετικών Σπουδών / Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής

Σάββατο 27 Απριλίου 2024 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1. Θεωρία
- A2. Θεωρία
- A3. Θεωρία
- A4. α) Λάθος
β) Σωστό
γ) Λάθος
δ) Λάθος
ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Έχουμε $D_f = (-\infty, 1) \cup [1, +\infty) = \mathbb{R}$.

$$\text{Επιπλέον } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-\sqrt[3]{1-x} + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\sqrt[3]{x-1} + 1) = 1 = f(1)$$

Άρα η f συνεχής στο $x = 1$.



Επιπλέον αν $x < 1$ η f είναι παραγωγίσιμη με

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(-\sqrt[3]{1-x} + 1 \right)' = \left(-(1-x)^{\frac{1}{3}} + 1 \right)' = -\frac{1}{3}(1-x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (1-x)' = \\ &= -\frac{1}{3}(1-x)^{-2/3} \cdot (-1) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3(\sqrt[3]{1-x})^2} > 0 \end{aligned}$$

Αν $x > 1$ η f είναι παραγωγίσιμη με

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sqrt[3]{x-1} + 1 \right)' = \left((x-1)^{\frac{1}{3}} + 1 \right)' = \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}} \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{1}{3(\sqrt[3]{x-1})^2} > 0 \end{aligned}$$

Άρα $f'(x) > 0 \forall x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ και αφού f συνεχής στο $x = 1$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R} \Rightarrow f^{-1}$.

Αν $x \geq 1$ και θέσουμε $f(x) = \psi \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1} + 1 = \psi \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1} = \psi - 1, \text{ με } \psi \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x-1 = (\psi-1)^3, \quad \psi \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = (\psi-1)^3 + 1, \quad \psi \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(\psi) = (\psi-1)^3 + 1, \quad \psi \geq 1 \quad (1)$$

Αν $x < 1$ και $f(x) = \psi \Leftrightarrow -\sqrt[3]{1-x} + 1 = \psi$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{1-x} = 1 - \psi \text{ με } 1 - \psi > 0 \Leftrightarrow \psi < 1$$

$$\Leftrightarrow 1-x = (1-\psi)^3, \text{ με } \psi < 1$$

$$\Leftrightarrow x-1 = -(1-\psi)^3, \text{ με } \psi < 1$$

$$\Leftrightarrow x = (\psi-1)^3 + 1, \quad \psi < 1$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(\psi) = (\psi-1)^3 + 1, \quad \psi < 1 \quad (2)$$

Από (1), (2) έχουμε:

$$f^{-1}(x) = (x-1)^3 + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$



2024 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

B2. Έστω ότι η ζητούμενη εφαπτομένη (ε) της $C_{f^{-1}}$ που είναι κάθετη προς την ευθεία $\psi = -\frac{1}{3}x + 1$ εφάπτεται στην $C_{f^{-1}}$ στο $M(x_0, f(x_0))$.

$$\text{Τότε } \lambda_{\varepsilon} = (f^{-1})'(x_0)$$

$$\text{με } (f^{-1})'(x) = ((x-1)^3 + 1)' = 3(x-1)^2$$

$$\Rightarrow \lambda_{\varepsilon} = 3(x_0 - 1)^2$$

$$\text{Όμως } \lambda_{\varepsilon} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon} = 3$$

$$\Rightarrow 3(x_0 - 1)^2 = 3 \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0(x_0 - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_0 = 0 \quad \text{ή} \quad x_0 = 2$$

Αν $x_0 = 0$ τότε

$$(\varepsilon): \psi - f^{-1}(0) = (f^{-1})'(0)(x - 0)$$

$$\psi - 0 = 3(x - 0)$$

$$\Rightarrow \psi = 3x$$

Αν $x_0 = 2$ τότε

$$(\varepsilon'): \psi - f^{-1}(2) = (f^{-1})'(2)(x - 2)$$

$$\psi - 2 = 3(x - 2)$$

$$\Rightarrow \psi = 3x - 4$$

B3. Ισχύει ότι $(f^{-1})'(x) = 3(x-1)^2 > 0 \quad \forall x \neq 1 \Rightarrow f^{-1}$ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Άρα έχουμε ισοδύναμα

$$f(e^{1-x}) < x \stackrel{f^{-1}}{\Leftrightarrow} \stackrel{\text{γν. αυξ.}}{f^{-1}(f(e^{1-x}))} < f^{-1}(x)$$

$$\Leftrightarrow e^{1-x} < f^{-1}(x) \Leftrightarrow f^{-1}(x) - e^{1-x} > 0. \quad (1)$$

$$\text{Θέτω } g(x) = f^{-1}(x) - e^{1-x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{και έχω } g(1) = f^{-1}(1) - e^0 = 1 - 1 = 0.$$



Επιπλέον $g'(x) = (f^{-1})'(x) + e^{-x} > 0 \Leftrightarrow g$ γν. αύξ. στο $\mathbb{R}$.

Από τη σχέση (1) έχουμε: $g(x) > g(1) \Leftrightarrow x > 1$.

Αλλιώς

Η ανίσωση γράφεται $f(e^{1-x}) - x < 0$

Θεωρώ $h(x) = f(e^{1-x}) - x$, $x \in \mathbb{R}$ και έχουμε ότι για $x = 1$ ισχύει $h(1) = f(1) - 1 = 0$.

Επιπλέον αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow 1 - x_1 > 1 - x_2 \Rightarrow e^{1-x_1} > e^{1-x_2}$

$\begin{aligned} & \Rightarrow f(e^{1-x_1}) > f(e^{1-x_2}) \quad \left. \begin{array}{l} f \text{ γν. αύξ.} \\ (+) \end{array} \right\} \Rightarrow f(e^{1-x_1}) - x_1 > f(e^{1-x_2}) - x_2 \Rightarrow h(x_1) > h(x_2) \\ & \text{και αφού } -x_1 > -x_2 \end{aligned}$

Άρα h γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Αφού $f(e^{1-x}) - x < 0 \Rightarrow h(x) < h(1) \stackrel{h}{\Rightarrow} x > 1$.
γν. φθίν.

B4. i. Ισχύει για $x \neq 0$ ότι $\frac{\eta\mu f^{-1}(x)}{x} = \frac{\eta\mu f^{-1}(x)}{f^{-1}(x)} \cdot \frac{f^{-1}(x)}{x}$

Θέτω $u = f^{-1}(x)$ κ' $\lim_{x \rightarrow 0} f^{-1}(x) = f^{-1}(0) = 0$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu f^{-1}(x)}{f^{-1}(x)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$

Επιπλέον $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x + 3}{1} = 3$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(f^{-1}(x))}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu f^{-1}(x)}{f^{-1}(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(x)}{x} = 3$

ii. Για $x > 0$ ισχύει:

$$f^{-1}(x) - f(x) = f^{-1}(x) \left(1 - \frac{f(x)}{f^{-1}(x)} \right)$$

$$\text{με } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x-1} + 1}{(x-1)^3 + 1} \stackrel{(*)}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u+1}{u^9+1} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u}{u^9} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{u^8} = 0$$



$$(*) \text{ Θέτω } u = \sqrt[3]{x-1} \Leftrightarrow x-1 = u^3 \text{ με } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x-1} = +\infty$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f^{-1}(x) - f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f^{-1}(x) \cdot \left(1 - \frac{f(x)}{f^{-1}(x)} \right) \right] = (+\infty) \cdot (1-0) = +\infty.$$

ΘΕΜΑ Γ

- Γ1.** Αφού $D_g = (0, +\infty)$ και ορίζεται η $g(g'(x)) \quad \forall x > 0$, πρέπει $g'(x) > 0 \quad \forall x > 0$,
οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Θέτουμε όπου x το $g'(x)$ στην αρχική σχέση και έχουμε:

$$g(g'(g'(x))) + g(g'(x)) = 0$$

$$\text{Όμως } g(g'(x)) = -g(x) \text{ από αρχική}$$

$$\Rightarrow g(g'(g'(x))) - g(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow g(g'(g'(x))) = g(x)$$

$$\text{και αφού } g \text{ γν. αυξ. στο } (0, +\infty) \Rightarrow g^{-1} - 1 \left. \vphantom{\begin{matrix} \Rightarrow g'(g'(x)) = x \\ \forall x > 0 \end{matrix}} \right\}$$

- Γ2.** Για $x = 1$ στην αρχική έχουμε

$$g(g'(1)) + g(1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overset{g(1)=0}{g(g'(1)) = 0} \Leftrightarrow g(g'(1)) = g(1) \overset{g}{\underset{1-1}{\Leftrightarrow}} g'(1) = 1$$

Παραγωγίζουμε την αρχική σχέση εφόσον η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} (g(g'(x)) + g(x))' &= 0 \Leftrightarrow g'(g'(x)) \cdot g''(x) + g'(x) = 0 \\ \text{με } g'(g'(x)) &= x \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \cdot g''(x) + g'(x) = 0 \Leftrightarrow (x \cdot g'(x))' = 0$$

Άρα από συνέπειες Θ.Μ.Τ. έχουμε $x \cdot g'(x) = c_1$

Για $x = 1$ έχουμε



$$\left. \begin{array}{l} g'(1) = c_1 \\ \text{με } g'(1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow c_1 = 1$$

Άρα $x \cdot g'(x) = 1 \Leftrightarrow g'(x) = \frac{1}{x}, \forall x > 0 \Leftrightarrow g'(x) = (\ln x)'$ οπότε από συνέπειες

Θ.Μ.Τ. έχουμε $g(x) = \ln x + c_2$

Για $x = 1$ έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} g(1) = \ln 1 + c_2 = c_2 \\ \text{και αφού } g(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow c_2 = 0$$

Άρα $g(x) = \ln x, x > 0$.

Γ3. 1^{ος} τρόπος

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την $g(x) = \ln x$ στο διάστημα $[|\eta\mu x|, |x|]$ με $x \neq 0$.

- g συνεχής στο $[|\eta\mu x|, |x|], x \neq 0$
- g παραγωγίσιμη στο $(|\eta\mu x|, |x|)$ με $g'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$

Άρα υπάρχει $\xi \in (|\eta\mu x|, |x|)$

$$\text{με } g'(\xi) = \frac{g(|x|) - g(|\eta\mu x|)}{|x| - |\eta\mu x|}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{g(|x|) - g(|\eta\mu x|)}{|x| - |\eta\mu x|}$$

$$\text{με } |\eta\mu x| < \xi < |x| \Rightarrow \frac{1}{|x|} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{|\eta\mu x|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x|} < \frac{g(|x|) - g(|\eta\mu x|)}{|x| - |\eta\mu x|} < \frac{1}{|\eta\mu x|}$$

$$\text{με } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(|x|) - g(|\eta\mu x|)}{|x| - |\eta\mu x|} = +\infty$$



2ος τρόπος

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(|x|) - g(|\eta \mu x|)}{|x| - |\eta \mu x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(|x|) - \ln(|\eta \mu x|)}{|x| - |\eta \mu x|} =$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{|\eta \mu x|} \cdot \frac{\ln \left| \frac{x}{\eta \mu x} \right|}{\left| \frac{x}{\eta \mu x} \right| - 1} \right)$$

Θέτουμε $u = \left| \frac{x}{\eta \mu x} \right|$ και έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x}{\eta \mu x} \right| = 1$.

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left| \frac{x}{\eta \mu x} \right|}{\left| \frac{x}{\eta \mu x} \right| - 1} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{\ln u}{u - 1} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{g(u) - g(1)}{u - 1} = g'(1) = 1.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{|\eta \mu x|} \cdot \frac{\ln \left| \frac{x}{\eta \mu x} \right|}{\left| \frac{x}{\eta \mu x} \right| - 1} \right) = (+\infty) \cdot 1 = +\infty.$$

Γ4. Έστω ότι η κοινή εφαπτομένη των C_g και C_f εφάπτεται στην C_f στο $A(x_1, f(x_1))$ και στην C_g στο $B(x_2, g(x_2))$.

$$\left. \begin{aligned} \text{Τότε } (\varepsilon): \psi - f(x_1) &= f'(x_1)(x - x_1) \\ \text{Με } f(x_1) &= -\frac{1}{x_1} \text{ κ' } f'(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x_1) = \frac{1}{x_1^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\varepsilon): \psi - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_1^2}(x - x_1) \Rightarrow \psi = \frac{1}{x_1^2} \cdot x - \frac{2}{x_1}$$

$$\text{Ακόμα } (\varepsilon): \psi - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2)$$
$$\Rightarrow \psi - \ln x_2 = \frac{1}{x_2}(x - x_2) \Rightarrow \psi = \frac{1}{x_2} \cdot x + \ln x_2 - 1$$

$$\text{Άρα πρέπει } \frac{1}{x_1^2} = \frac{1}{x_2} \text{ και } \ln x_2 - 1 = -\frac{2}{x_1} \Rightarrow$$



$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1^2 \\ \Rightarrow \ln x_2 + \frac{2}{x_1} - 1 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \ln x_1^2 + \frac{2}{x_1} - 1 = 0$$

$$\text{Θεωρώ } h(x) = \ln x^2 + \frac{2}{x} - 1, \quad x \neq 0$$

$$h'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2(x-1)}{x^2}, \quad x \neq 0$$

$$\text{Αν } h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$h'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1 \text{ και } x \neq 0$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	-	-	0	+
$h(x)$				

h γν. φθίνουσα και συνεχής στο $(-\infty, 0)$ με

$$h((-\infty, 0)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) \right) = (-\infty, +\infty),$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\ln x^2 + \frac{2}{x} - 1 \right) = (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\ln x^2 + \frac{2}{x} - 1 \right) = (+\infty) + 0 - 1 = +\infty.$$

Άρα υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (-\infty, 0)$: $h(x_1) = 0$.

Αν $x > 0$ έχουμε ότι $h(x) \geq h(1) = \ln 1 + 2 - 1 = 1 \Rightarrow h(x) > 0$ οπότε η h δεν έχει ρίζα στο $(0, +\infty)$.

Άρα η $h(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}^*$, οπότε οι συναρτήσεις f, g έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη.



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ισχύει $\int_0^1 \ln^2 f(x) dx + \frac{1}{2} = \int_0^1 \sqrt{x} \cdot \ln f^2(x) dx \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \ln^2 f(x) dx - \int_0^1 2\sqrt{x} \cdot \ln f(x) dx + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \ln^2 f(x) dx - \int_0^1 2\sqrt{x} \cdot \ln f(x) dx + \int_0^1 x dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 (\ln^2 f(x) - 2\sqrt{x} \ln f(x) + x) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 (\ln f(x) - \sqrt{x})^2 dx = 0$$

Ισχύει ότι $(\ln f(x) - \sqrt{x})^2 \geq 0, \forall x \in [0,1]$.

Αν δεν ισχύει παντού η ισότητα τότε:

$$\int_0^1 (\ln f(x) - \sqrt{x})^2 dx > 0 \Leftrightarrow 0 > 0 \text{ άτοπο}$$

Άρα $\ln f(x) - \sqrt{x} = 0, \forall x \in [0,1] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \ln f(x) = \sqrt{x} \Leftrightarrow f(x) = e^{\sqrt{x}}, \forall x \in [0,1].$$

Δ2. $f(x) = e^{\sqrt{x}}, x \geq 0$

$$f'(x) = e^{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})' = e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f''(x) = \left(e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)' = e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{4x} + e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{(-1)}{4x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{4x} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{4x} \cdot \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$$

$$\text{Αν } f''(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{Αν } f''(x) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$\text{Αν } f''(x) < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$



2024 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

x	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	ϕ	+
$f(x)$		Σ. Κ.	

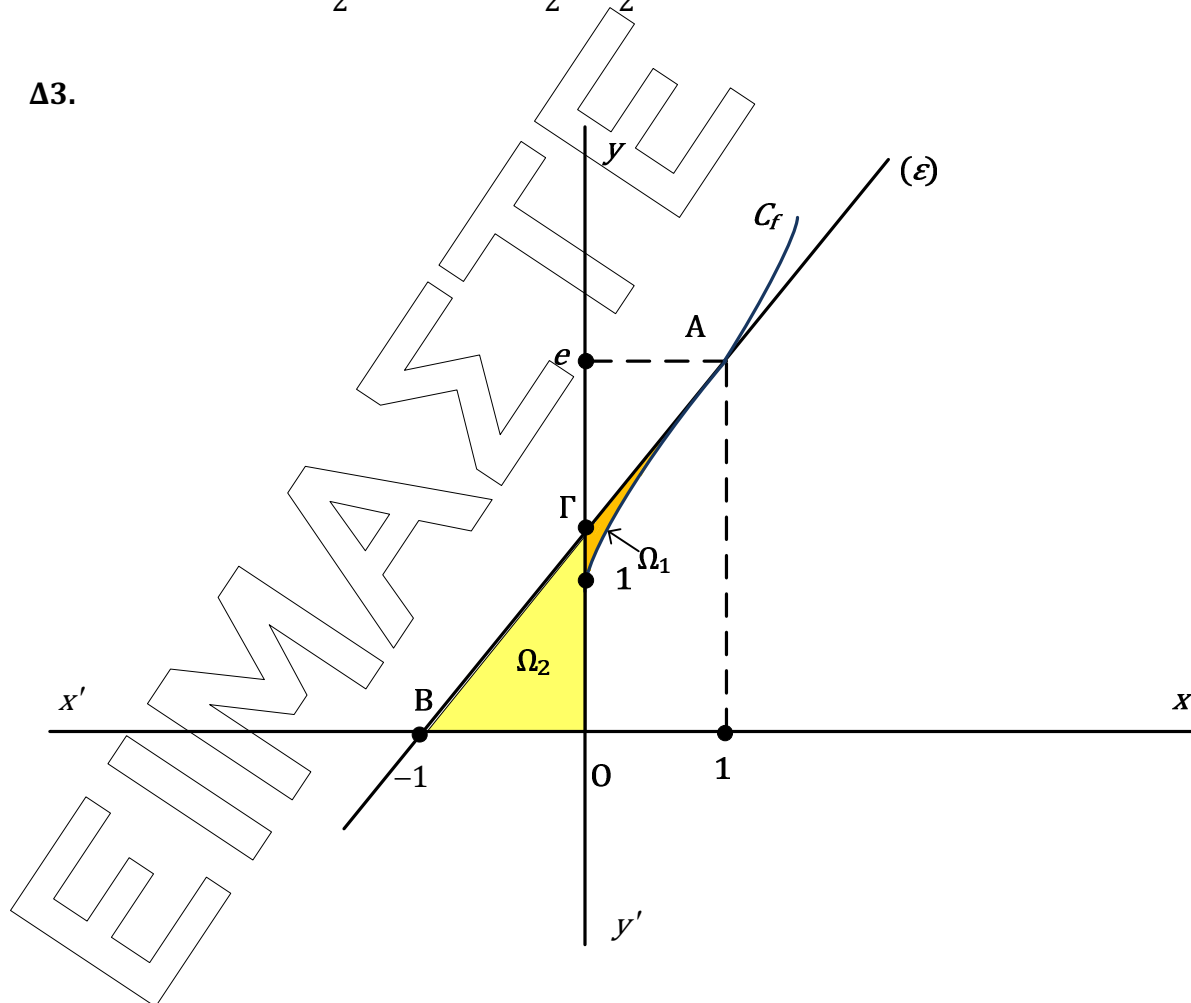
f κοίλη στο $[0, 1)$, f κυρτή στο $(1, +\infty)$ και το σημείο $A(1, e)$ είναι σημείο καμπής.

Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο A έχει εξίσωση:

$$\psi - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\varepsilon): \psi - e = \frac{e}{2}(x - 1) \Leftrightarrow \psi = \frac{e}{2}x + \frac{e}{2}$$

Δ3.





Βρίσκω τα σημεία τομής της (ε) με τους άξονες xx' και yy' .

$$\text{Για τον } xx' \text{ θέτω } y=0 \text{ και έχω: } 0 = \frac{e}{2}x + \frac{e}{2} \Rightarrow x = -1$$

Άρα $B(-1, 0)$.

$$\text{Για τον } yy' \text{ θέτω } x=0 \text{ και έχω } y = \frac{e}{2} \text{ άρα } \Gamma\left(0, \frac{e}{2}\right).$$

Ισχύει ότι $E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2)$ όπου

$$E(\Omega_1) = \int_0^1 \left| \frac{e}{2}x + \frac{e}{2} - f(x) \right| dx \quad \text{και} \quad E(\Omega_2) = \left(\overset{\Delta}{OBF} \right).$$

Ισχύει ότι f στο $[0, 1]$ άρα C_f κάτω από την εφαπτομένη $(\varepsilon): y = \frac{e}{2}x + \frac{e}{2}$.

$$\text{Άρα } f(x) \leq \frac{e}{2}x + \frac{e}{2}, \quad \forall x \in [0, 1] \text{ άρα}$$

$$E(\Omega_1) = \int_0^1 \left(\frac{e}{2}x + \frac{e}{2} - e^{\sqrt{x}} \right) dx = \frac{e}{2} \int_0^1 (x+1) dx - \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$$

$$\text{με } \int_0^1 (x+1) dx = \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$\text{και } \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx \stackrel{(*)}{=} \int_0^1 e^u \cdot 2u du = I$$

$$(*) \text{ θέτω } u = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = u^2 \Rightarrow dx = 2u du$$

$$u_1 = \sqrt{0} = 0, u_2 = \sqrt{1} = 1$$

$$I = \int_0^1 (e^u)' \cdot 2u du = \left[2ue^u \right]_0^1 - \int_0^1 e^u \cdot 2 du = 2e - \left[2e^u \right]_0^1 = 2e - (2e - 2) = 2$$

$$\text{Άρα } E(\Omega_1) = \frac{e}{2} \cdot \frac{3}{2} - 2 = \frac{3e}{4} - 2.$$

$$E(\Omega_2) = \left(\overset{\Delta}{QBF} \right) = \frac{1}{2} (OB) \cdot (OG) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{e}{2} = \frac{e}{4}.$$

$$\text{Οπότε } E(\Omega) = \frac{3e}{4} - 2 + \frac{e}{4} = e - 2 \text{ τ.μ.}$$



Δ4. Έστω $M(x_0, f(x_0))$ με $x_0 > 0$.

Τότε η εφαπτομένη (ε) στο M έχει εξίσωση:

$$\psi - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow \psi - e^{\sqrt{x_0}} = \frac{e^{\sqrt{x_0}}}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0)$$

$$\text{Για } \psi = 0 \text{ έχω } -e^{\sqrt{x_0}} = \frac{e^{\sqrt{x_0}}}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = x_0 - 2\sqrt{x_0} \Leftrightarrow x_N = x_M - 2\sqrt{x_M}$$

$$\Leftrightarrow x_N(t) = x(t) - 2\sqrt{x(t)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x'_N(t) = x'(t) - \frac{1}{\sqrt{x(t)}} \cdot x'(t) = x'(t) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x(t)}} \right)$$

Θέτοντας $t = t_0$ όπου $x(t_0) = 1$ ($M = A$) και $x'(t_0) = x'(t) > 0$

$$\text{έχουμε } x'_N(t_0) = x'(t_0) \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x(t_0)}} \right) = x'(t_0) \cdot \left(1 - \frac{1}{1} \right) = 0$$

Δ5. Θέτω $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ για $x > 0$ και έχω:

$$h'(x) = f'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) < 0 \Rightarrow h \text{ γν. φθίν. στο } (0, +\infty)$$

Αρκεί να δείξω ότι:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+1} f\left(\frac{1}{x}\right) dx > \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\alpha+2} f\left(\frac{1}{x}\right) dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \int_{\alpha}^{\alpha+1} h(x) dx > \int_{\alpha}^{\alpha+2} h(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \int_{\alpha}^{\alpha+1} h(x) dx > \int_{\alpha}^{\alpha+1} h(x) dx + \int_{\alpha+1}^{\alpha+2} h(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\alpha+1} h(x) dx > \int_{\alpha+1}^{\alpha+2} h(x) dx, \quad \alpha > 0.$$



2024 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

$$\left. \begin{array}{l} \text{Αν } \alpha \leq x \leq \alpha+1 \xRightarrow[\text{γν.φθίν.}]{h} h(\alpha) \geq h(x) \geq h(\alpha+1) \\ \text{χωρίς να ισχύει παντού το " = " } \end{array} \right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int_{\alpha}^{\alpha+1} h(x) dx > \int_{\alpha}^{\alpha+1} h(\alpha+1) dx = h(\alpha+1) \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Αν } \alpha+1 \leq x \leq \alpha+2 \xRightarrow[\text{γν.φθίν.}]{h} h(\alpha+1) \geq h(x) \geq h(\alpha+2) \\ \text{χωρίς να ισχύει παντού το " = " } \end{array} \right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int_{\alpha+1}^{\alpha+2} h(x) dx < \int_{\alpha+1}^{\alpha+2} h(\alpha+1) dx = h(\alpha+1) \quad (2)$$
$$\text{Από (1) (2)} \Rightarrow \int_{\alpha}^{\alpha+1} h(x) dx > h(\alpha+1) > \int_{\alpha+1}^{\alpha+2} h(x) dx$$
$$\Rightarrow \boxed{\int_{\alpha}^{\alpha+1} h(x) dx > \int_{\alpha+1}^{\alpha+2} h(x) dx} \text{ απεδείχθη.}$$