



2024 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' Γενικού Λυκείου

Θετικών Σπουδών

Μ. Τρίτη 30 Απριλίου 2024 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ με $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ και με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Να αποδείξετε την ισοδυναμία $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$.

Μονάδες 7

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

i. Κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής $\varepsilon: x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ με $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$.

ii. Όλες οι ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων δίνονται από την εξίσωση $y = \lambda x$.

iii. Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ τότε $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$.

iv. Η έλλειψη (c): $2x^2 + 3y^2 = 6$ έχει τις εστίες της στον άξονα $x'x$.

v. Η παραβολή $x^2 = 2py$ έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 10



2024 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

A3. Κάθε κωνική της στήλης Α έχει εξίσωση που βρίσκεται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών.

Στήλη Α Είδος κωνικής τομής	Στήλη Β Εξίσωση γραμμής
1. κύκλος	Α. $x + y = 1$
2. παραβολή	Β. $(y - 1)^2 = 5 - x^2$
3. έλλειψη	Γ. $x^2 + y^2 = 0$
4. υπερβολή	Δ. $9x^2 = 63 + 7y^2$
	Ε. $y^2 - 16x = 0$
	Ζ. $4x^2 = 100 - 25y^2$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2 - 3\lambda)x + (\lambda - 1)y - \lambda^2 + \lambda + 2 = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.

B1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία (ε_λ) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Έστω ότι η εξίσωση (1) παριστάνει τις πορείες πέντε τελεφερίκ που κατευθύνονται στη βάση ενός χιονοδρομικού κέντρου, για $\lambda = 1, 2, 3, 4, 5$ αντίστοιχα.

B2. Να βρείτε τη θέση Κ της βάσης του χιονοδρομικού κέντρου.

Μονάδες 5

Αν $K(1,2)$

B3. Να δείξετε ότι το πρώτο και το τρίτο τελεφερίκ κινούνται σε κάθετες πορείες

Μονάδες 7



2024 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

- B4.** Αν ένας σκιέρ βρίσκεται στη θέση $\Lambda(-1, -2)$, να εξετάσετε αν ο σκιέρ είναι πιο κοντά στη βάση του χιονοδρομικού ή σε κάποιο από τα τελεφερίκ $(\varepsilon_4), (\varepsilon_5)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Έστω τα σημεία $M(\kappa - 3, 5\lambda + 4)$ και $N(\kappa + 3, 5\lambda - 4)$, ώστε τα διανύσματα $\overrightarrow{OM}$ και $\overrightarrow{ON}$ να είναι κάθετα.

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι τα σημεία (κ, λ) ανήκουν στην έλλειψη (c): $\frac{x^2}{25} + y^2 = 1$

Μονάδες 5

- Γ2.** Να βρείτε το μήκος του μεγάλου άξονα, το μήκος του μικρού άξονα, τις εστίες καθώς και την εκκεντρότητα της έλλειψης (c).

Μονάδες 6

- Γ3.** Έστω A το άκρο του μεγάλου άξονα της έλλειψης με θετική τετμημένη και B' το άκρο του μικρού άξονα με αρνητική τεταγμένη αντίστοιχα. Να βρείτε τις εφαπτομένες της έλλειψης που είναι παράλληλες στο διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$.

Μονάδες 7

- Γ4.** Έστω E η εστία της έλλειψης με θετική τετμημένη και σημείο K τέτοιο ώστε $\overrightarrow{EK} = (-\sqrt{6}, \sqrt{6})$.

- i. να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου K ,
ii. να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου KEE' .

Μονάδες 5+2



ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda - 1)x^2 - (2\lambda - 5)y^2 - (2\lambda + 4)x - x^2 + 3\lambda - 2 = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Δ1.** Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση (1) να παριστάνει κύκλο (c_1) , του οποίου να βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα ρ . Τι παριστάνει η (1) αν $\lambda = -2$;

Μονάδες 4+2

- Δ2.** Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση (1) να παριστάνει παραβολή (c_2) , με κορυφή $O(0,0)$ και άξονα συμμετρίας τον $x'x$, της οποίας να βρείτε την εστία E και την διευθετούσα (δ) .

Μονάδες 4

- Δ3.** Να βρείτε τα κοινά σημεία A, B των $(c_1), (c_2)$.

Μονάδες 4

- Δ4.** Να βρείτε τις εφαπτομένες της παραβολής (c_2) στα σημεία $A(6, 2\sqrt{3})$ και $B(6, -2\sqrt{3})$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι τέμνονται σε σημείο Γ του άξονα $x'x$.

Μονάδες 5

- Δ5.** Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη απόσταση του σημείου Γ από τον κύκλο (c_1) .

Μονάδες 6