



2024 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' Γενικού Λυκείου

Θετικών Σπουδών

Μ. Τρίτη 30 Απριλίου 2024 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη σχολικό βιβλίο σελίδα 38

A2. i. Σ

ii. Λ

iii. Λ

iv. Σ

v. Λ

A3. $1 \rightarrow B$

$2 \rightarrow E$

$3 \rightarrow Z$

$4 \rightarrow \Delta$

ΘΕΜΑ Β

B1. Έστω $A = \lambda^2 - 3\lambda$ και $B = \lambda - 1$. Η εξίσωση (1) παριστάνει (ε_λ) ευθεία αν και μόνο αν $A \neq 0$ ή $B \neq 0$.

$$A = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \lambda = 3$$

$$B = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

Άρα $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.



2024 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

B2. Για $\lambda=1$, έχουμε $x=1$

Για $\lambda=2$, έχουμε: $-2x+y=0 \Leftrightarrow -2+y=0 \Leftrightarrow y=2$. Δηλαδή το σημείο $K(1,2)$.

Για $x=1$ και $y=2$ η εξίσωση (1) δίνει: $\lambda^2 - 3\lambda + 2\lambda - 2 = \lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow 0=0$, ισχύει. Άρα το σημείο $K(1,2)$ είναι η βάση του χιονοδρομικού κέντρου.

B3. $\lambda=1 \Rightarrow (\varepsilon_1): x=1$, δηλαδή $(\varepsilon_1) \perp x'x$

$\lambda=3 \Rightarrow (\varepsilon_3): y=2$, δηλαδή $(\varepsilon_3) \parallel x'x$. Άρα $(\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_3)$.

B4. $(KL) = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$$d(L, (\varepsilon_4)) = \frac{|-4-6-10|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|-20|}{\sqrt{25}} = 4$$

$$d(L, (\varepsilon_5)) = \frac{|-10-8-18|}{\sqrt{100+16}} = \frac{|-36|}{\sqrt{116}} = \frac{36}{4\sqrt{29}} = \frac{9}{\sqrt{29}}$$

Όμως $d(L, (\varepsilon_5)) < d(L, (\varepsilon_4)) < (KL)$, άρα ο σκιέρ βρίσκεται πιο κοντά στην πορεία του πέμπτου τελεφερίκ.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\overline{OM} \perp \overline{ON} \Leftrightarrow \overline{OM} \cdot \overline{ON} = 0 \Leftrightarrow (\kappa-3)(\kappa+3) + (5\lambda+4)(5\lambda-4) = 0 \Leftrightarrow$

$$\kappa^2 + 25\lambda^2 = 25 \Leftrightarrow \frac{\kappa^2}{25} + \lambda^2 = 1. \text{ Άρα ανήκουν στην έλλειψη (c): } \frac{x^2}{25} + y^2 = 1.$$

Γ2. Οπότε $\alpha^2 = 25 \Rightarrow \alpha = 5$ και $\beta^2 = 1 \Rightarrow \beta = 1$, άρα $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 25 - 1 = 24$, δηλαδή $\gamma = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

Μεγάλος άξονας: $2\alpha = 10$

Μικρός άξονας: $2\beta = 2$

Εστίες: $E(2\sqrt{6}, 0)$ και $E'(-2\sqrt{6}, 0)$



$$\text{Εκκεντρότητα: } \varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

Γ3. Είναι $A(5, 0)$ και $B'(0, -1)$, άρα $\lambda_{\overline{AB'}} = \frac{1}{5}$ και έστω $M(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής.

Τότε:

$$(\varepsilon): \frac{x_1 \cdot x}{25} + y_1 \cdot y = 1 \Leftrightarrow x_1 \cdot x + 25y_1 \cdot y - 25 = 0 \text{ και } \lambda_\varepsilon = -\frac{x_1}{25y_1}.$$

$$(\varepsilon) // \overline{AB'} \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_{\overline{AB'}} \Leftrightarrow -\frac{x_1}{25y_1} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x_1 = -5y_1$$

$$\text{Όμως } M(x_1, y_1) \in (c) \Rightarrow \dots \Rightarrow y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ή } y_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ οπότε:}$$

$$(\varepsilon_1): -\sqrt{2} \cdot x + 5\sqrt{2} \cdot y - 10 = 0 \text{ και } (\varepsilon_2): \sqrt{2} \cdot x - 5\sqrt{2} \cdot y - 10 = 0.$$

Γ4. i. Έστω $K(x_o, y_o)$, τότε $\overline{EK} = (x_o - 2\sqrt{6}, y_o) = (-\sqrt{6}, \sqrt{6})$, άρα $K(\sqrt{6}, \sqrt{6})$.

$$\text{ii. Ακόμα } \overline{E'K} = (3\sqrt{6}, \sqrt{6}), \text{ άρα } (KEE') = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ 3\sqrt{6} & \sqrt{6} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |-24| = 12 \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Πρέπει $\lambda - 1 = -(2\lambda - 5) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \lambda = 2$

Τότε: $x^2 + y^2 - 8x = 0$ ή $(x - 4)^2 + y^2 = 16$, δηλαδή κύκλος (c_1) με κέντρο $K(4, 0)$ και ακτίνα $\rho = 4$.

$$\text{Αν } \lambda = -2, \text{ τότε: } -3x^2 + 9y^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow 9y^2 - 3x^2 = 12 \Leftrightarrow \frac{y^2}{\frac{4}{3}} - \frac{x^2}{4} = 1, \text{ δηλαδή}$$

υπερβολή με εστίες στον άξονα $y'y$.



Δ2. Πρέπει $\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$, τότε: $3y^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow y^2 = 2x$, δηλαδή παραβολή (c_2) με $2p = 2 \Leftrightarrow p = 1$, άρα $E\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ και $\delta: x = -\frac{1}{2}$.

Δ3.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x = 0 \\ y^2 = 2x \end{cases} \Rightarrow x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 6 \text{ άρα } y^2 = 12 \Leftrightarrow y = \pm 2\sqrt{3}$$

Δηλαδή τα σημεία $O(0,0)$, $A(6, 2\sqrt{3})$ και $B(6, -2\sqrt{3})$.

Δ4. Οι εφαπτομένες στα σημεία A και B, είναι
 $\varepsilon_1: 2\sqrt{3}y = 1 \cdot (x + 6)$, δηλαδή $\varepsilon_1: x - 2\sqrt{3}y + 6 = 0$ και
 $\varepsilon_2: -2\sqrt{3}y = 1 \cdot (x + 6)$, δηλαδή $\varepsilon_2: x + 2\sqrt{3}y + 6 = 0$.

Λύνοντας το σύστημα των ε_1 και ε_2 , προκύπτει το σημείο $\Gamma(-6, 0) \in x'x$.

Δ5. Το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ είναι: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}AB \cdot \nu$, όπου AB η απόσταση των σημείων A και B, ενώ ν είναι η απόσταση του Γ από την AB.

Δηλαδή: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$ τ.μ.

Ακόμα: $d_{\min} = (O\Gamma) = 6$ και $d_{\max} = (O\Gamma) + 2\rho = 6 + 8 = 14$.