



2024 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

ΑΛΓΕΒΡΑ (ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1)

Β' Γενικού Λυκείου

Γενικής Παιδείας

Σάββατο 27 Απριλίου 2024 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

- A1. Να αποδείξετε ότι ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα της μορφής $x - \rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$.
(Μονάδες 5)
- A2. Πότε μία συνάρτηση λέγεται περιττή και ποια η γεωμετρική ερμηνεία μιας περιττής συνάρτησης;
(Μονάδες 5)
- A3. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο;
(Μονάδες 5)
- A4. Σε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις, να γράψετε στην κόλλα σας τον αριθμό που αντιστοιχεί και δίπλα το γράμμα (Σ) αν θεωρείτε τη πρόταση σωστή, ή το γράμμα (Λ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι λανθασμένη.
- i. Υπάρχει γωνία α τέτοια ώστε $\varepsilon\phi\alpha = 2024$.
 - ii. Αν για τη γωνία ω ισχύει $\eta\mu\omega = 0$ τότε υποχρεωτικά $\sigma\upsilon\nu\omega = 1$.
 - iii. Αν ένα πολυώνυμο έχει παράγοντα το x τότε έχει ρίζα το 0.
 - iv. Η ευθεία $y = 5$ είναι κάθετη στον άξονα $y'y$.
 - v. Το πηλίκο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $5^{\text{ου}}$ βαθμού με ένα πολυώνυμο $2^{\text{ου}}$ βαθμού, είναι $3^{\text{ου}}$ βαθμού.

(Μονάδες 10)



2024 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(180^\circ - x) + \sigma\upsilon\nu(90^\circ - x), x \in \mathbb{R}$.

B1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2\eta\mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 12)

B2. i. Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f .

(Μονάδες 6)

ii. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f για $0 \leq x \leq 2\pi$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^4 + x^3 + ax - 4$ και $\delta(x) = x^2 - 3x + 2$. Το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x)$ με το $\delta(x)$, είναι το πολυώνυμο $\upsilon(x) = 24x - 24$.

Γ1. Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού a .

(Μονάδες 8)

Γ2. Για $a = 2$,

i. Να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 1$.

(Μονάδες 2)

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα $x'x$ με την γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$.

(Μονάδες 8)

iii. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 7)



2024 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2, x \neq 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 5)

Δ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) = \ln x$.

(Μονάδες 7)

Δ3. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2, x \neq 0$.

(Μονάδες 6)

Δ4. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση είναι κάτω από την ευθεία $y = 2$.

(Μονάδες 7)



2024 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

ΑΛΓΕΒΡΑ (ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2)

Β' Γενικού Λυκείου

Γενικής Παιδείας

Σάββατο 27 Απριλίου 2024 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς x, y ισχύει:
 $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$.

(7 μονάδες)

A2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ ;

(4 μονάδες)

A3. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει τόξο x , τέτοιο ώστε να ισχύει $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x = 1$.

(4 μονάδες)

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

(10 μονάδες)

1. Μια άρτια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δεν μπορεί να είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της.

2. Το μηδενικό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.

3. Αν για ένα πολυώνυμο $f(x)$ ισχύει ότι $f(2)=0$, τότε η διαίρεση $f(x):(x^2-4)$ είναι τέλεια.

4. Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \leq 2024$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε το 2024 είναι το ολικό μέγιστο της f .



2024 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

5. Για κάθε θετικό αριθμό x ισχύει $\ln x = \log 10^{\frac{1}{2} \ln x^2}$.

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπους $f(x) = p(y) \cdot x + \ln e^{2024}$ και $g(x) = (2 - y) \cdot (y - 1)^2 \cdot x + e^{\ln 2024}$, όπου $p(y)$ είναι ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού, με ακέραιους συντελεστές.

Δίνεται ακόμα ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν άπειρα κοινά σημεία.

B1. Να δείξετε ότι $p(y) = -y^3 + 4y^2 - 5y + 2$.

(4 μονάδες)

B2. Να βρείτε για ποιες τιμές του y , η γραφική παράσταση του πολυωνύμου $p(y)$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, για ποιες τιμές βρίσκεται κάτω από τον $x'x$, και σε ποια σημεία τέμνει τον άξονα $x'x$.

(8 μονάδες)

B3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις τιμές του τόξου ω , με $23\pi < \omega < 24\pi$, για τις οποίες το $\eta\mu\omega$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $p(y)$.

(8 μονάδες)

B4. Να λύσετε (ως προς y) την εξίσωση $p(e^y) = 0$.

(5 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση κάθε περιττής συνάρτησης με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(3 μονάδες)



2024 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

Γ2. Δίνεται μια περιττή πολυωνυμική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$.

1. Να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης $f(x): (x^3 - x)$ είναι $v(x) = 2x$.

(8 μονάδες)

2. Αν, επιπλέον, γνωρίζετε ότι η f είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού και ισχύει $f(2) = 10$, τότε:

a. Να δείξετε ότι το πηλίκο της διαίρεσης $f(x): (x^3 - x)$ είναι το σταθερό πολυώνυμο $\pi(x) = 1$.

(7 μονάδες)

b. Να λύσετε την ανίσωση $f(\ln x) < 2$.

(7 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(\sqrt{e^x - \alpha})$ και $g(x) = \sqrt{\ln(e^x - \alpha)}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε το $(x - \alpha)$ να είναι παράγοντας του πολυωνύμου $p(x) = x^3 - 1$.

Δ1. Να δείξετε ότι $\alpha = 1$.

(3 μονάδες)

Δ2. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

(7 μονάδες)

Δ3. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δύο σημεία, το ένα εκ των οποίων βρίσκεται πάνω στον άξονα $x'x$.

(8 μονάδες)

Δ4. Να μελετήσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων f, g και μετά να αποδείξετε ότι $f(2024) - f(2025) < g(2025) - g(2024)$.

(7 μονάδες)